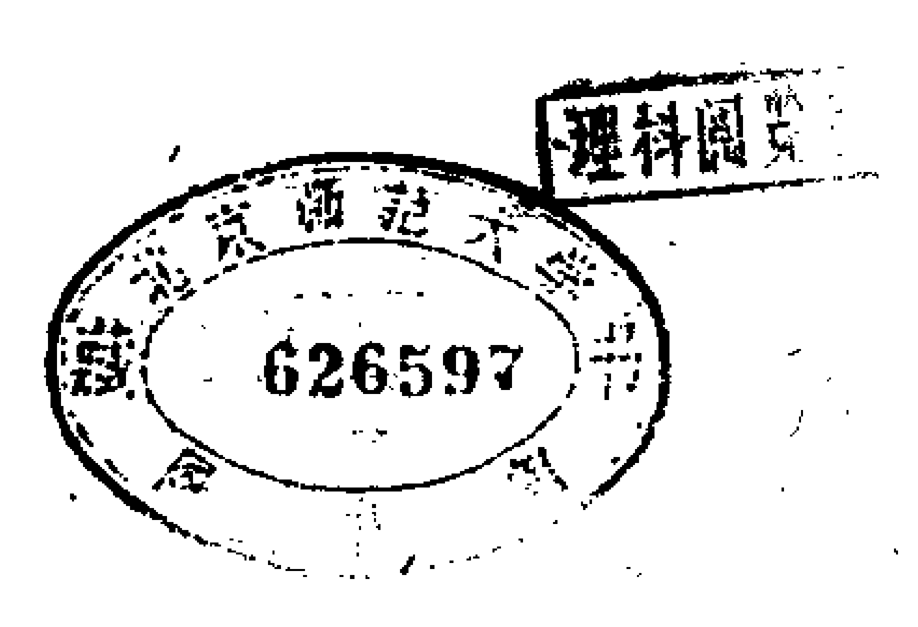
数学小丛书

(13)

复数与几何

常庚哲　伍润生



北京市数学会编

人民教育出版社

1964年·北京

这本小册子通过了许多的例子，说明了复数在平面上的几何学中的一些方便的、有趣的应用。第一节"复平面"简单复习关于复数的基本知识。第二节"一些例子"列举了复数应用于几何学的一些一般性的例子。以下三、四、五、六节分别说明复数在"共线、共圆、共点"，"圆族"，"复数的分式线性变换"，"等速圆周运动"等方面的应用。在说明这些应用的同时，介绍了一些数学上常用的思考方法。小册子中还附有习题和题解，提供练习的机会。

复数与几何

常庚哲　伍润生

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

天水新华印刷厂印装

统一书号：13012 · 0250　字数：43 千

开本：787×1092 毫米 1/32　印张：$2\frac{3}{8}$

1964 年 9 月第一版

1979 年 1 月第 3 次印刷

印数：104,001—404,000册

定价 0.20 元

編者的話

数学課外讀物对于帮助学生学好数学，扩大他們的数学知識領域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生閱讀的通俗数学讀物．我們約請一些数学工作者，編写了这套“数学小丛书”，陆續分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介紹一些課外的数学知識，以扩大学生的知識領域，加强对数学基础知識的掌握，引导学生独立思考，理論联系实际．

这是我們的初步想法和尝試，热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物．

北京市数学会

1962 年 4 月

引　言

从中学代数教科书中，讀者已經学习过复数的基本概念和运算．但是在那里学到的主要是复数的代数性质，例如：为了解决在实数范圍內不可能解出的方程 $x^2+1=0$ 而引入了虛单位 i，后来又利用复数开出 1 的 n 次方根等等．讀者可曾想到，正是在代数上起着重要作用的复数，它在平面上的几何学中也能找到应用？这本小册子的目的就是通过許許多多的例子来显示出复数在几何上的应用．

我們假定讀者对于复数的定义和它的代数运算已經熟悉．但是，为了便于大家回忆，还是在第一节中簡略地复述一下复数的基本知識．

我們希望讀者尽可能地多做每节之后所附的习题，这对于掌握該节所介紹的方法大有好处．

目　　次

一 复平面

每个复数 z 都具有 $x+iy$ 的形式，其中 x 和 y 都是实数，分别称为 z 的实部和虚部，記成 $x=R(z)$，$y=I(z)$. i 称为虚单位，适合 $i^2=-1$. 两个复数 z 与 z' 当且只当 $R(z)=R(z')$，$I(z)=I(z')$ 时才成立着 $z=z'$.

我們可以在平面上表示复数. 在平面上取定一直角坐标系 OXY. 对于复数 $z=x+iy$，我們用平面上具有横坐标 $x=R(z)$ 与纵坐标 $y=I(z)$ 的点 $(x,y)=(R(z),\ I(z))$ 来表示（图 1.1）；反之，若給出平面上一点 (x,y)，我們取复数 $x+iy$ 与这个点对应. 这样，就建立了平面上所有的点和一切复数之間的一个一一对应. 正因为如此，我們就把复数和平面上的点完全等同起来，以后把具有坐标 $(R(z),I(z))$ 的那点就用复数 z 来表示，說成点 z. 这样，平面上的每一点 z 都与一个确定的复数对应着，这个平面，就称之为复平面，OX 軸称为实軸，OY 軸称为虚軸，O 称为原点，它用复数 0 表示.

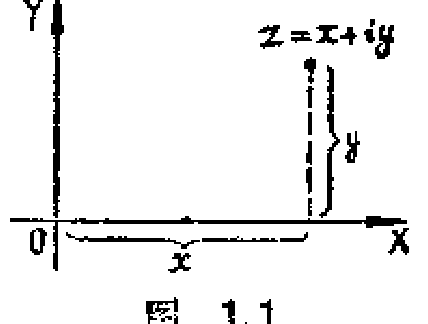


图 1.1

我們还可以把复数看成平面向量，所謂向量，是指既有方向又有长短的量. 給出一复数 z，以原点 O 为起点，以点 z 为終点，可以連成一条有方向的綫段，这就是一个向量，用 $\overrightarrow{Oz}$ 表示. 反之，画出一个由 O 点起的向量，它的終点便唯一地确定了一个复数. 这样看来，平面上所有从原点出发的向量与一

切复数之間也有了一个一一对应. 正因为如此，我們就可以把平面上的向量和复数完全等同起来. 今后就用复数 z 来表示向量 $\overrightarrow{Oz}$，并且約定可以写成

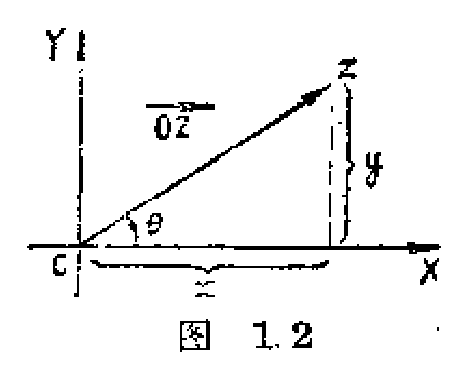


图 1.2

$$z=\overrightarrow{Oz}.$$

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度用記号 $\|\overrightarrow{Oz}\|$ 表示. 令 $\rho=\|\overrightarrow{Oz}\|$，由图 1.2 可以看出

$$\rho^2=x^2+y^2.$$

这个公式解决了向量长度的計算. 那么如何表示出向量的方向呢？显然可以用 $\overrightarrow{Oz}$ 与实軸正方向之間的夹角 θ 来表示. 不过，我們要規定 θ 的正負号. 当 z 在包括实軸在內的上半平面时，θ 取非負值并滿足 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$；当 z 在不包括实軸在內的下半平面时，θ 取負值，并且适合 $-\pi<\theta<0$. 只有 $z=0$ 是例外，这时无法規定 θ 的值. 事实上这时向量 $\overrightarrow{Oz}$ 縮成了一个点，它的长度为零，当然談不到有什么确定的方向，这种向量称为零向量.

仍由图 1.2 可見

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

利用这个公式，对于任意异于零的复数 $z=x+iy$ 都可表成如下的形式

$$z=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

为簡便起見，我們把 $\cos\theta+i\sin\theta$ 用一个記号 $e^{i\theta}$ 来記，亦即置

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

于是就有

$$z=\rho e^{i\theta}.$$

这个表达式，很明显地指出了复数的向量性质：ρ 表長短，$e^{i\theta}$ 管方向，它們各司各职，而复数 z 作为它們的乘积，就是一个既有长短又有方向的量——亦即为一向量了.

我們令 $|z|=\rho$，称为 z 的模. 滿足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 称为 z 的幅角，記成 $\theta=\arg z$.

例
$$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$$
$$i=e^{i\frac{\pi}{2}},$$
$$-1=e^{i\pi},$$
$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}},$$
$$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

讀者已經知道，若 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$，則 z_1+z_2 是指复数

$$(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

我們来看看，这种加法运算具有什么样的几何解釋.

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2.

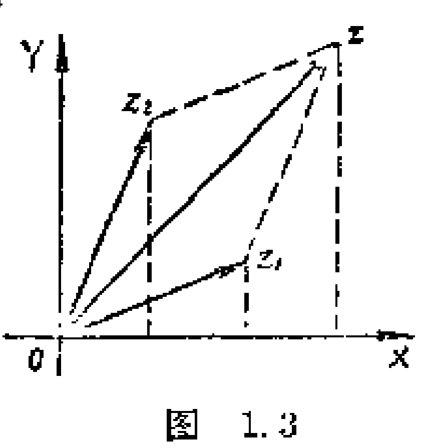


图 1.3

由图 1.3 可見

$$R(z)=x_1+x_2=R(z_1+z_2),$$
$$I(z)=y_1+y_2=I(z_1+z_2).$$

由复数相等的定义可知

$$z=z_1+z_2.$$

我們也可以将此公式改写为

$$\overrightarrow{Oz}=\overrightarrow{Oz_1}+\overrightarrow{Oz_2},$$

这正是向量加法的平行四边形規則.

前面已經說过，一个向量的要素只有两个，即长短和方向，至于其它的一切东西，例如起点的位置，都是无关紧要的. 如果有两个向量，它們的长短和方向相同，我們就說这两个向量是相等的. 于是我們就可以考虑起点不在原点的向量，比如起点是 z_1 終点是 z_2 的向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ (图 1.4)，将它的起点搬到原点去而不改变它的方向，就得到另一向量 $\overrightarrow{Oz'}$，根据向量相等的意思，应当有

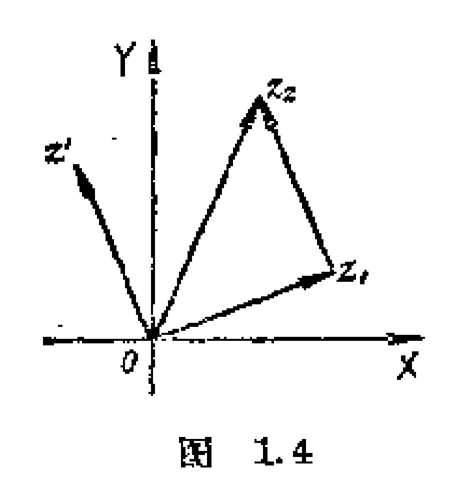


图 1.4

$$\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{Oz'}.$$

但是由向量加法的定义，又有

$$\overrightarrow{Oz'}+\overrightarrow{Oz_1}=\overrightarrow{Oz_2}.$$

从而

$$\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{Oz'}=\overrightarrow{Oz_2}-\overrightarrow{Oz_1}=z_2-z_1.$$

这就是說，起点在 z_1 終点在 z_2 的向量，如果把它平行地移动使起点落到原点，那么这个向量就可以用复数 z_2-z_1 表示. 这个看法請讀者务必搞清楚，因为在这本小册子中一再地利用了这个事实. 例如起点在 -1 終点在 i 的那个向量可用 $i-(-1)=1+i$

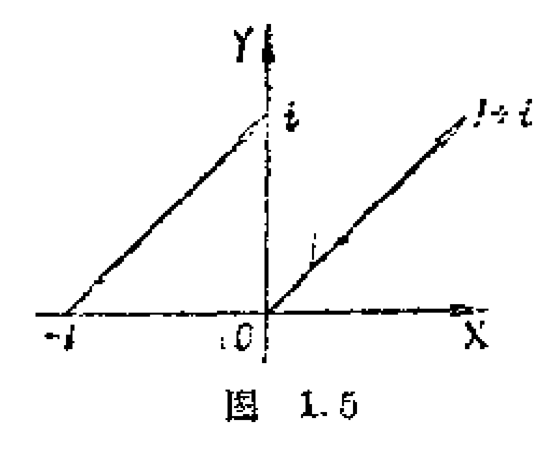


图 1.5

来表示(图 1.5)。

现在再来复习复数的乘法，設

$$z_0=\rho_0 e^{i\theta_0},\quad z=\rho e^{i\theta}.$$

所以

$$\begin{aligned} z_0 z &= (\rho_0 e^{i\theta_0})(\rho e^{i\theta}) \\ &= \rho_0\rho(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)(\cos\theta+i\sin\theta) \\ &= \rho_0\rho[(\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta) \\ &\quad +i(\sin\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta)] \\ &= \rho_0\rho[\cos(\theta_0+\theta)+i\sin(\theta_0+\theta)] \\ &= \rho_0\rho e^{i(\theta_0+\theta)}. \end{aligned}$$

我們不对这个公式作一般的几何解釋，只注意它的两个重要的特殊情況。

1) 当 $\rho=|z|=1$ 时，$z=e^{i\theta}$，于是

$$zz_0=e^{i\theta}z_0=\rho_0 e^{i(\theta_0+\theta)}=|z_0|e^{i(\theta_0+\theta)}.$$

这表明，用 $e^{i\theta}$ 去乘任一个复数 z_0，并不改变 z_0 的模，但是使 z_0 的幅角增加了 θ. 从几何上来看，用 $e^{i\theta}$“作用”(乘)到向量 z_0 上去，得到了一个与 z_0 长短相同的向量，它的方向是由 z_0 的方向轉动一个角度 θ 而得到. 这里須加一点說明，由于 θ 可正可負. 当 $\theta>0$ 时，把 z_0 沿反时針方向轉动 θ 就得到了向量 $z_0e^{i\theta}$；若 $\theta<0$ 时，把 z_0 沿順时針方向轉动 $-\theta$ 才得到向量 $z_0e^{i\theta}$. 特别，因为

$$iz_0=e^{i\frac{\pi}{2}}z_0,\quad -iz_0=e^{-i\frac{\pi}{2}}z_0,$$

可知向量 iz_0 和 $-iz_0$ 是把 z_0 分别沿反时針方向和順时針方向轉一直角而得. 由 $-z_0=(-1)z_0=e^{i\pi}z_0$，可知 $-z_0$ 的方

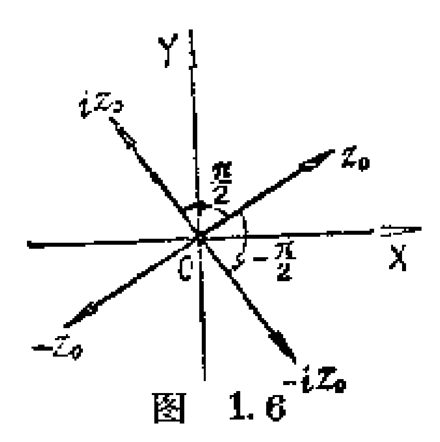


图 1.6

向正好和 z_0 的方向相反，这两个向量互为逆向量(图 1.6).

2) 当 $\theta=0$ 时，$z=\rho>0$，即此时 z 为一正实数，因此

$$zz_0=\rho z_0=(\rho\rho_0)e^{i\theta_0}.$$

这表明，用正实数 ρ 去乘复数 z_0，不改变 z_0 的幅角，只使它的模乘上了 ρ 倍．从几何上来看，用正实数 ρ "作用"(乘)到向量 z_0 上去，并不改变 z_0 的方向，只是使 z_0 的长短"拉长"(当 $\rho<1$ 时实际上是縮短)了 ρ 倍．根据这点說明，特别的，由图 1.7 可見，z_1 与 z_2 連綫的中点可以用复数 $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ 来表示．

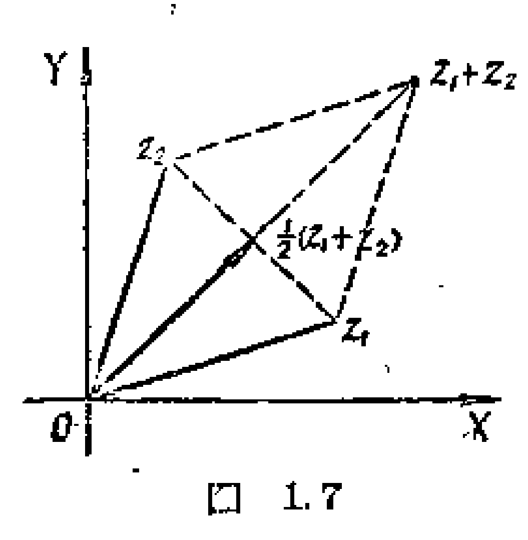


图 1.7

由于乘法的公式已經得到，于是对于

$$z_1=\rho_1e^{i\theta_1},\quad z_2=\rho_2e^{i\theta_2},$$

有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}.$$

对于这个公式应当特别理解的是 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ 表示着由向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 轉到 $\overrightarrow{Oz_2}$ 所扫过的有向角度——即带有一定正負号的角度．如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)>0$，表示这轉动的角度是沿反时針方向(图 1.8)．如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)<0$，表示是沿順时針方向轉动的角度

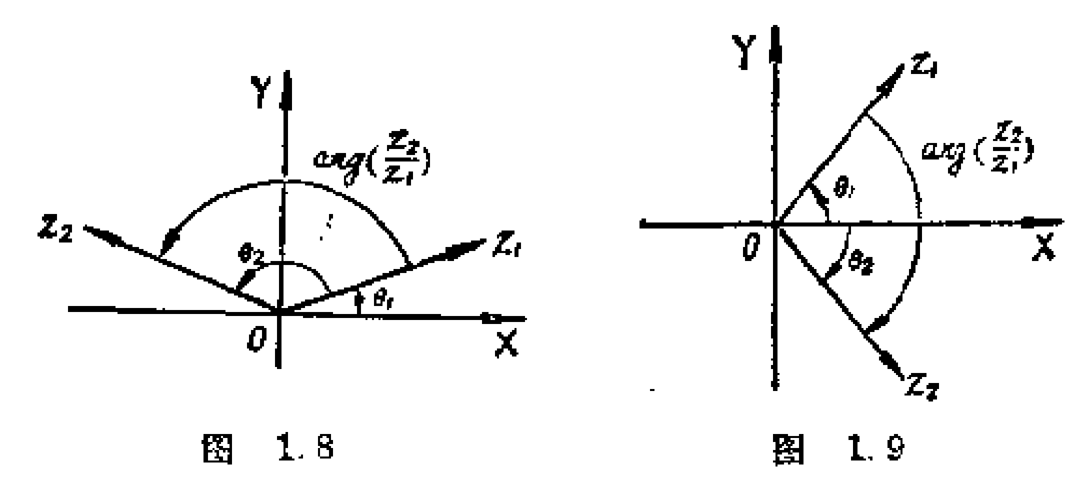


图 1.8　　　　图 1.9

(图 1.9). 显然，这种轉动的角度，按絕对值来說是不超过 π 的.

例如要算出 i 到 $-(1+i)$ 的有向轉动角(图 1.10).

$$\arg\left[\frac{-(1+i)}{i}\right]=\arg\left(-1-\frac{1}{i}\right)$$

$$=\arg(-1+i)$$

$$=\frac{3}{4}\pi.$$

图 1.10

最后复习一下 1 开 n 次方，这里 n 为自然数，这就是說要求出复数 z 使 $z^n=1$. 設 $z=\rho e^{i\theta}$，于是

$$z^n=\underbrace{\rho\cdot\rho\cdots\rho}_{n\text{个}}\cdot\underbrace{e^{i\theta}\cdot e^{i\theta}\cdots e^{i\theta}}_{n\text{个}}$$

$$=\rho^n e^{in\theta}=1.$$

对等式的两边取模，得 $\rho^n=1$，因 ρ 是正实数，故 $\rho=1$. 因为，不論 k 是什么整数，当 $n\theta=2k\pi$ 时都有

$$e^{in\theta}=e^{i2k\pi}=1,$$

所以 $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 对于任何整数 k 都是 1 的 n 次根，但是在它們中

間，彼此不同的只有 n 个，这 n 个根可以令 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 而得到，即

$$1,\ e^{i\frac{2\pi}{n}},\ e^{i\frac{4\pi}{n}},\cdots,e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

是 n 个互不相同的 1 的 n 次根．它們叫做 n 次单位根．由于它們的模等于 1，所以都在以原点为中心半徑为 1 的圓周(此圓称为单位圓)上，而且相邻的两个幅角相差 $\frac{2\pi}{n}$．

特别的，当 $n=3$ 时，得三次单位根为：

$$1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

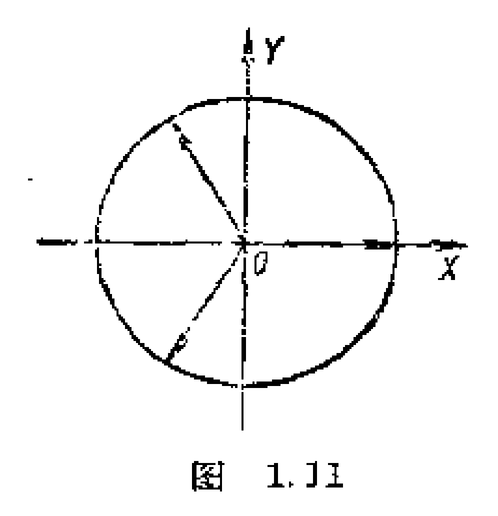


图 1.11

它們的分布如图 1.11 所示．

一切必要的預备知識的叙述到此为止．这都是一些簡单的、在中学課本里已經学过的东西，但是对閱讀这本小册子以后的內容来說都是基本重要的．特别是把复数看成平面向量；复数加法的平行四边形法則；用 $e^{i\theta}$ 去乘 z_0 的几何解釋；用一正实数 ρ 去乘 z_0 的几何解釋等等，都应該彻底了解并学会熟练地运用．

第一节的习題

1．滿足下列关系的点 z 位于何处？作出图形．

1. $|z|\leq 2$　　2. $2<|z|\leq 4$

3. $R(z)>\frac{1}{2}$　　4. $I(z)\leq\frac{1}{2}$

5. $R(z)=I(z)$ 6. $\arg z=\frac{\pi}{4}$

7. $0\leqslant\arg z<\frac{\pi}{4}$ 8. $I(z^2)=2$

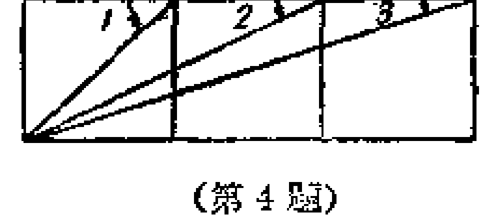
9. $I(z^2)>2$ 10. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$

2. 已知一正三角形两頂点为 a、b，試写出在一切可能情形下的另一頂点.

3. 已知一正方形的两頂点为 a、b，試写出在一切可能情形下的其它两頂点.

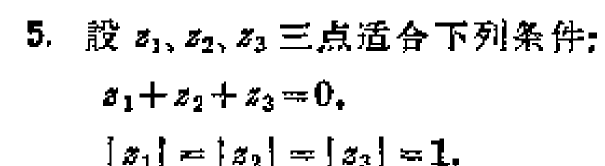
4. 右图是并列的三个大小相同的正方形，证明

$$\angle1+\angle2+\angle3=\frac{\pi}{2}.$$



(第 4 題)

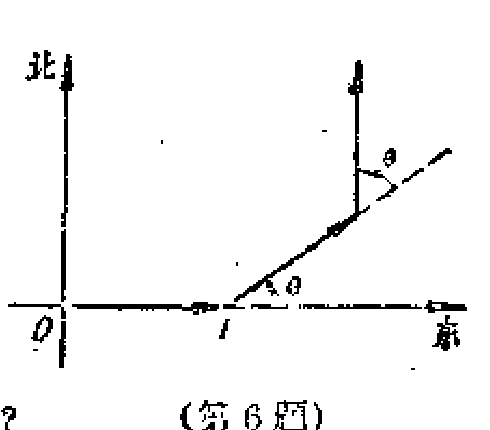
5. 設 z_1、z_2、z_3 三点适合下列条件:



$$z_1+z_2+z_3=0,$$
$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$$

求证 z_1、z_2、z_3 是内接于单位圓的正三角形的三个頂点.

6. 有一个人在草原上漫步，开始时从 O 处出发，向正东行走，每走过 1 公里后便向左轉一角度 θ. 問他走过了 N 公里后，离出发点的直綫距离是多少(見右图)?



(第 6 題)

二 一些例子

这里，我們用第一节中介紹过的知識来解一些初等几何中的問題.

1° 从复数相加的几何解釋(参看图 1.3)，可以看出

$$|\overrightarrow{Oz}|\leqslant|\overrightarrow{Oz_1}|+|\overrightarrow{Oz_2}|.$$

这是因为：任何三角形两边之和必不小于第三边。把上述不等式用复数写出来是

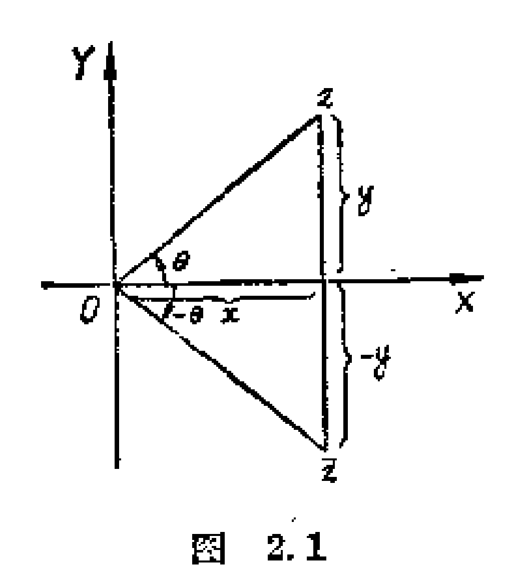


图 2.1

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (1)$$

这是一个常用的不等式。

现在設 $z=x+iy=\rho e^{i\theta}$. 令 $\bar{z}=x-iy$，称 $\bar{z}$ 为 z 的**共軛复数**。容易看出，z 与 $\bar{z}$ 居于关于实軸对称的位置(图 2.1). 于是

$$\bar{z}=\rho e^{-i\theta}.$$

故

$$|z|^2=\rho^2=(\rho e^{i\theta})(\rho e^{-i\theta}),$$

亦即

$$|z|^2=z\bar{z}. \qquad (2)$$

設 a 为一固定点。若动点 z 到 a 的距离等于常数 ρ，则 z 满足条件

$$|z-a|=\rho. \qquad (3)$$

可见适合(3)的点 z 描画出以 a 为中心以 ρ 为半徑的圓周。可以将(3)改写成

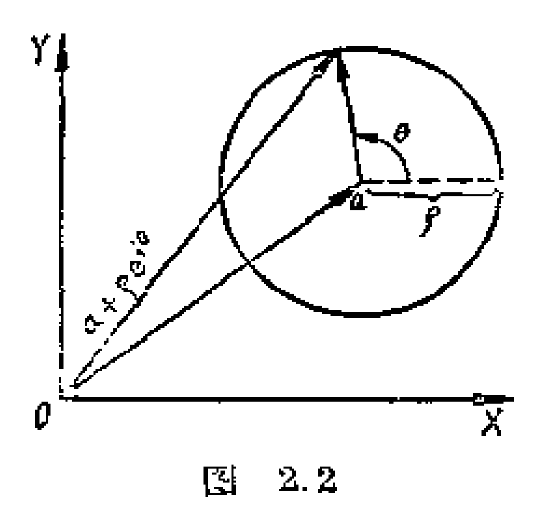


图 2.2

$$z-a=\rho e^{i\theta}, \quad (-\pi<\theta\leqslant\pi)$$

亦即

$$z=a+\rho e^{i\theta}. \qquad (4)$$

当 θ 从 $-\pi$ 变到 π 时，由(4)的右边表达的复数 z 就描出圆周一圈(图 2.2).

特别，若此圆中心在原点，即 $a=0$，则圆周上的点 z 适合

$$|z|=\rho \text{ 或 } z=\rho e^{i\theta}.$$

对于单位圆周上的点 z，则有

$$|z|=1 \text{ 或 } z=e^{i\theta}.$$

例 1 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并对此等式作出几何解释.

证 利用(2)可得

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2),\\|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2).\end{aligned}$$

将此二式相加便得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

这等式的几何意义是：平行四边形的对角綫的平方和等于四条边的平方和(图 2.3).

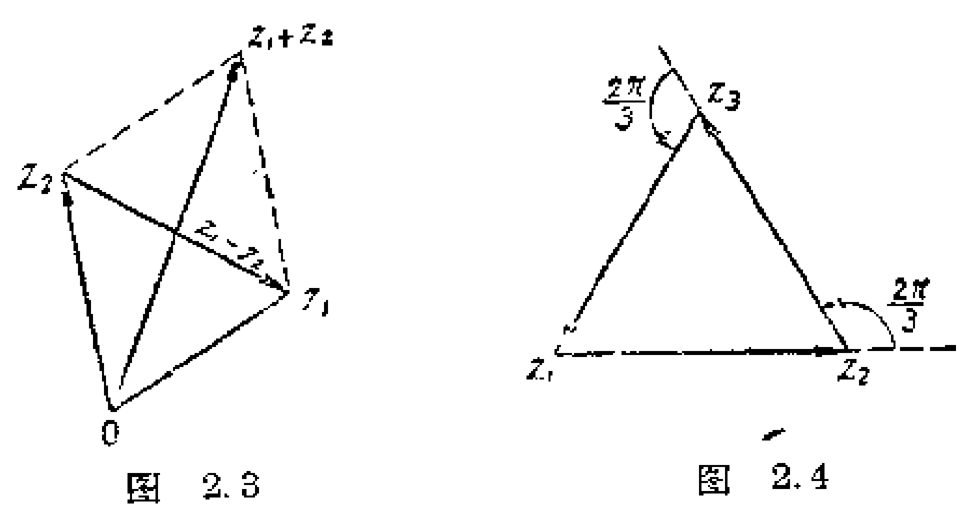


图 2.3　　　　图 2.4

例 2 求证三个复数 z_1、z_2、z_3 組成一正三角形的三个頂点的必要充分条件是它們适合等式

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

证 i) 必要性

設$\triangle z_1z_2z_3$为正三角形(图 2.4)，所以三外角都等于$\frac{2\pi}{3}$，故

$$\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

并且三边都相等，即

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|.$$

由此可推出

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}\left(=e^{i\frac{2\pi}{3}}\right).$$

将此式变为$(z_3-z_2)^2=(z_1-z_3)(z_2-z_1)$后再化简便得

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

ii) 充分性

設等式$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$成立。照 i)中进行的步驟反推回去可得等式

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}.$$

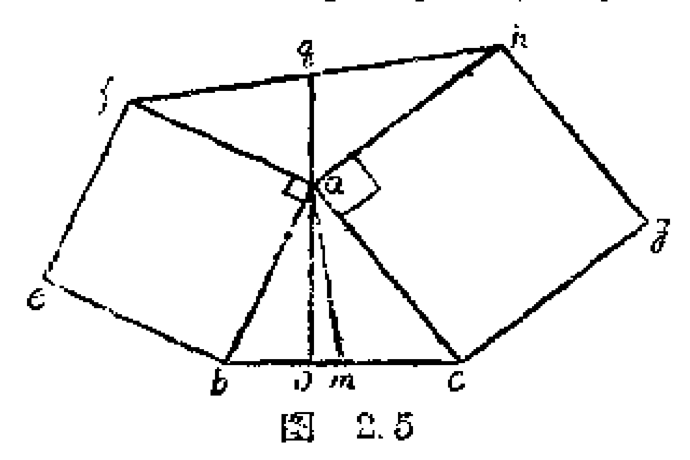


图 2.5

这正說明$\triangle z_1z_2z_3$三外角相等，故为正三角形。

例 3 在$\triangle abc$的两边作正方形 $abef$ 及 $acgh$(图 2.5). 求证

i) $\triangle abc$的高 ao

必平分 fh;

ii) $\triangle abc$ 的中綫 am 之长为 fh 之长的一半.

证 适当选取坐标系，使 b、c 之連綫为实軸，而使 o 为原点. 于是 a 可以写成 λi 的形状，这里 λ 为一正实数，而 b、c 都是实数.

i) 因为

$$f=a+(a-b)i,$$

$$h=a+(c-a)i,$$

故它們的連綫的中点 q 可表为

$$q=\frac{f+h}{2}=a+\frac{(c-b)}{2}i$$

$$=\lambda i+\frac{(c-b)}{2}i=\left(\lambda+\frac{c-b}{2}\right)i.$$

这里 $\lambda+\dfrac{c-b}{2}$ 是一实数，这説明 q 在虚軸上，因为高 ao 也在虚軸上，故高 ao 平分 fh.

ii) 因为

$$|\overrightarrow{fh}|=|h-f|=|b+c-2a|.$$

$$m=\frac{b+c}{2},$$

所以

$$|\overrightarrow{am}|=|m-a|=\left|\frac{b+c}{2}-a\right|=\frac{1}{2}|b+c-2a|$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{fh}|.$$

例 4 設 O 为平面上一固定点. 考察平面上所有滿足条

件$|\overrightarrow{Oa}|=\alpha$, $|\overrightarrow{Ob}|=\beta$的正三角形$\triangle abc$. 問$|\overrightarrow{Oc}|$的最大长度等于多少?

解 取O为复平面的原点. 不妨把a固定在正实軸上, 由于$|\overrightarrow{Oa}|=\alpha$, 故$a=\alpha$; 又因$|\overrightarrow{Ob}|=\beta$, 故可写

$$b=\beta e^{i\theta}.$$

正三角形$\triangle abc$的另外一个頂点有两个可能的位置, 如图2.6中的c_1及c_2所示. 由图可見

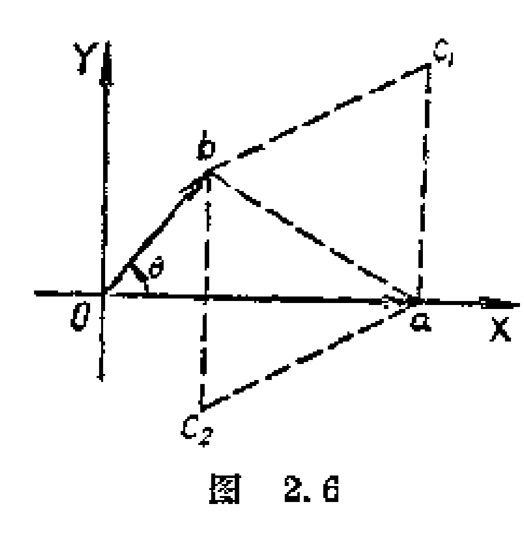


图 2.6

$$c_1=b+(a-b)e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$c_2=b+(a-b)e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

将c_1、c_2合記为c, 把上两式合写为

$$c=b+(a-b)e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

$$=ae^{\pm i\frac{\pi}{3}}+b(1-e^{\pm i\frac{\pi}{3}}).$$

但因

$$e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=1,$$

故上式可以改成

$$c=ae^{\pm i\frac{\pi}{3}}+be^{\mp i\frac{\pi}{3}}$$

$$=e^{\mp i\frac{\pi}{3}}(ae^{\pm i\frac{2\pi}{3}}+b)$$

于是

$$|c|=|ae^{\pm i\frac{2\pi}{3}}+b|$$

$$=|\alpha e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}+\beta e^{i\theta}|.$$

这样一来, 求$|\overrightarrow{Oc}|$的最大长度就化成求$|c|$的最大值. 利用不

等式(1)可知

$$|c| \leqslant |\alpha e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}| + |\beta e^{i\theta}| = \alpha + \beta.$$

但当 $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ 时，$c = (\alpha+\beta)e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$，这时 $|\overrightarrow{Oc}|$ 就 有最大长度 $\alpha+\beta$.

2° 在第一节中已經知道，任一复数 z 都可以写成

$$z = |z| e^{i\theta},$$

其中 $\theta = \arg z$. 由此可得

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

取其实部和虚部便有

$$\cos\theta = R\left(\frac{z}{|z|}\right), \quad \sin\theta = I\left(\frac{z}{|z|}\right). \tag{5}$$

設 z_1、z_2 是两个不为零的向量，前节已經指出，从 $\overrightarrow{Oz_1}$ 到 $\overrightarrow{Oz_2}$ 的有向角 φ 滿足

$$\varphi = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right).$$

将 $\frac{z_2}{z_1}$ 看成(5)中的 z，于是 φ 就相当于(5)中 θ 的地位，这样一来便得到

$$\cos\varphi = R\left(\frac{z_2}{z_1}\Big/\left|\frac{z_2}{z_1}\right|\right) = R\left(\frac{z_2}{z_1}\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$= R\left(\frac{z_2}{z_1}\frac{|z_1|^2}{|z_1||z_2|}\right) = R\left(\frac{z_2 z_1 \bar{z}_1}{z_1|z_1||z_2|}\right)$$

$$=R\left(\frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1||z_2|}\right)=\frac{1}{|z_1||z_2|}R(\bar{z}_1 z_2). \qquad (6)$$

同理

$$\sin\varphi=I\left(\frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1||z_2|}\right)=\frac{1}{|z_1||z_2|}I(\bar{z}_1 z_2). \qquad (7)$$

利用(7)可以計算平面上点 z_2 到向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 的距离 δ. 从图 2.7 容易看出

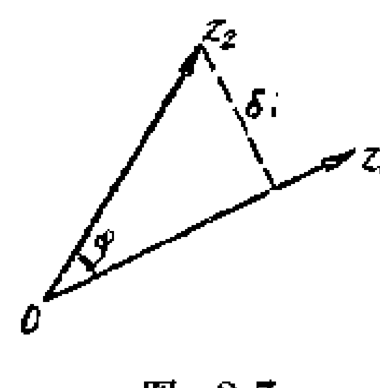


图 2.7

$$\delta=|z_2|\sin\varphi=\frac{1}{|z_1|}I(\bar{z}_1 z_2)$$

$$=I\left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|}\cdot z_2\right)=I(e^{-i\theta_1}z_2), \qquad (8)$$

其中

$$\theta_1=\arg z_1.$$

由于 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, 故 $\sin\varphi$ 可正可负, 从而 δ 也可正可负, 于是由公式(8)表示出的距离, 称为有向距离. 为了得到距离的数值, 只計算 $|\delta|$ 就可以了.

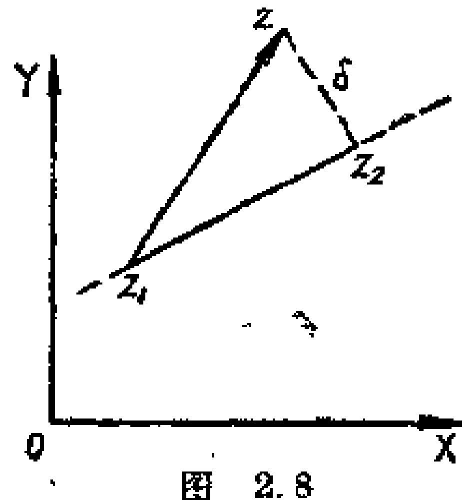


图 2.8

平面上一点 z 到另外两点 z_1、z_2 的連綫的有向距离 δ, 正好是向量 $z-z_1$ 的終点到向量 z_2-z_1 的有向距离 (图 2.8), 按公式(8)有

$$\delta=I[e^{-i\arg(z_2-z_1)}(z-z_1)]. \qquad (9)$$

现在利用公式(9)来解一个題.

例 5 n 个內角都相等的凸 n 边形內的任一点到各边的距离之和等于一个常数.

证 設在复数平面上, 此凸 n 边形的 n 个頂点按反时針方向排列可用复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 表示(图 2.9), 并設此多边形

的内角为 φ, 外角为 θ, 于是

$$n\theta = n(\pi-\varphi) = n\pi - n\varphi$$
$$= n\pi - (n-2)\pi = 2\pi.$$

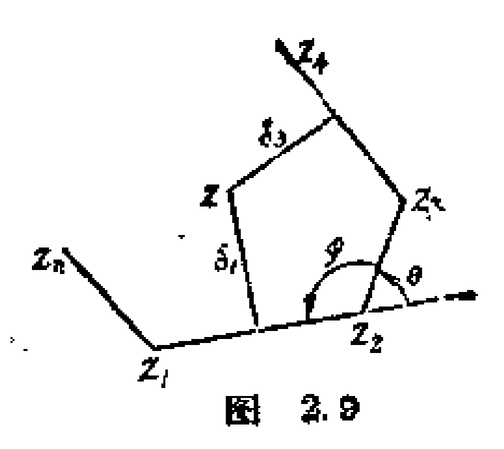


图 2.9

令

$$\arg(z_2 - z_1) = \theta_0.$$

可见

$$\arg(z_3 - z_2) = \theta_0 + \theta,$$
$$\arg(z_4 - z_3) = \theta_0 + 2\theta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\arg(z_n - z_{n-1}) = \theta_0 + (n-2)\theta,$$
$$\arg(z_1 - z_n) = \theta_0 + (n-1)\theta.$$

从而, 依公式(9), z 到各边距离之和为

$$I[(z-z_1)e^{-i\arg(z_2-z_1)}] + I[(z-z_2)e^{-i\arg(z_3-z_2)}]$$
$$+\cdots + I[(z-z_n)e^{-i\arg(z_1-z_n)}]$$
$$= I[(z-z_1)e^{-i\theta_0}] + I[(z-z_2)e^{-i(\theta_0+\theta)}] + \cdots$$
$$+ I[(z-z_n)e^{-i(\theta_0+(n-1)\theta)}]$$
$$= I[ze^{-i\theta_0}(1+e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}+\cdots+e^{-i(n-1)\theta})]$$
$$- I[e^{-i\theta_0}(z_1+z_2e^{-i\theta}+z_3e^{-i2\theta}+\cdots+z_ne^{-i(n-1)\theta})].$$

因为

$$1+e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}+\cdots+e^{-i(n-1)\theta} = \frac{1-e^{-in\theta}}{1-e^{-i\theta}}$$
$$= \frac{1-e^{-2\pi i}}{1-e^{-i\theta}} = 0,$$

从而

$$I[ze^{-i\theta_0}(1+e^{-i\theta}+e^{-i2\theta}+\cdots+e^{-i(n-1)\theta})] = I(0) = 0.$$

于是距离之和等于

$$-I[e^{-i\theta_0}(z_1+z_2e^{-i\theta}+z_3e^{-i2\theta}+\cdots+z_ne^{-i(n-1)\theta})]$$

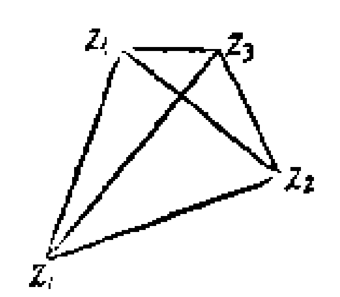
是一个与 z 无关的常数，这就证明了我們的命題。

第二节的习題

1. 求出复数 a 关于直綫 $R(z)=I(z)$ 的对称点.

2. (1) 求证向量 z 与 z' 垂直的必要充分条件是

$$R(\bar{z}z')=0.$$



(第 3 題)

(2) 求证等式 $|z+z'|=|z|+|z'|$ 成立的必要充分条件是

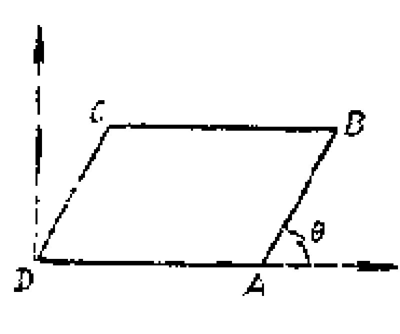
$$R(\bar{z}z')=|z||z'|,$$

并对此作出几何解釋.

3. 求证在四边形 $z_1z_2z_3z_4$ 中，对角綫互相垂直的必要充分条件是

$$\|\overrightarrow{z_1z_2}\|^2+\|\overrightarrow{z_3z_4}\|^2=\|\overrightarrow{z_2z_3}\|^2+\|z_4z_1\|^2$$

4. 在 $\triangle z_1z_2z_3$ 的各边上，分别向外作正三角形 $\triangle z_1z_2w_3$，$\triangle z_2z_3w_1$，$\triangle z_3z_1w_2$.



(第 5 題)

求证：$\triangle w_1w_2w_3$ 为正三角形的必要充分条件是 $\triangle z_1z_2z_3$ 为正三角形.

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，若

$$\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}^2=\overline{AB}^4+\overline{AD}^4,$$

适当地选取坐标系以证明：这平行四边形的銳角必为 45°.

6. 若四复数 z_1, z_2, z_3, z_4 适合条件

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,$$

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1.$$

求证它們构成一个內接于单位圓的一矩形的四个頂点。

三　共綫、共圓、共点

1° 設 z_1、z_2、z_3 三点同在一条直綫上. 由图 3.1 可見向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 和 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 的关系不外乎下面两种:

i) $\overrightarrow{z_1z_2}$ 与 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 方向相同;

ii) $\overrightarrow{z_1z_2}$ 与 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 方向相反.

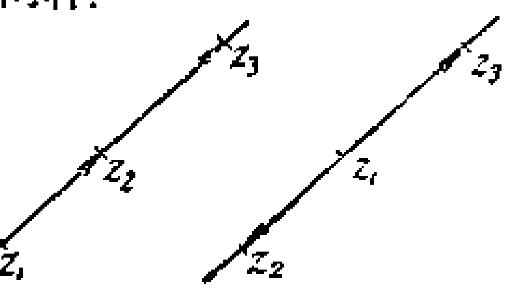


图 3.1

在前一种情形此二向量夹角为零, 在后一种情形此二向量的夹角为 π. 这就是說

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=0 \text{ 或 } \pi. \tag{1}$$

反之, 若(1)成立, 則 z_1、z_2、z_3 必同在一条直綫上. 但是大家知道, 一个复数的幅角是零或 π, 則这复数一定是一个异于零的实数; 反过来也对. 于是可以把条件(1)改写为

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\lambda. \quad (\lambda \text{ 为一实数})$$

因此我們得到結論: 三点 z_1、z_2、z_3 共綫的必要充分条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\lambda \text{ (实数)}. \tag{2}$$

这里不排除 $\lambda=0$ 的情形, 因为当 $\lambda=0$ 时, $z_1=z_3$, 于是三点 z_1、z_2、z_3 实际上是两点 z_1、z_2, 它們当然是共綫的. 条件(2)用起来并不方便, 起碼, 对于同在一直綫上的三点 z_1、z_2、z_3, 它們在(2)中的地位是不对称的. 为了消除这种不对称性, 我們給出

定理一　三点 z_1、z_2、z_3 共綫的必要充分条件是: 存在三

个不全为零的实数 λ_1、λ_2、λ_3 满足关系

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,$$

并使

$$\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0. \tag{3}$$

证 i) 必要性

若 z_1、z_2、z_3 共綫，則依(2)有

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\lambda \text{ (实数)}.$$

此即

$$(\lambda-1)z_1-\lambda z_2+z_3=0.$$

只要令 $\lambda_1=\lambda-1$, $\lambda_2=-\lambda$, $\lambda_3=1$，便知

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=(\lambda-1)+(-\lambda)+1=0,$$

$$\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3=0.$$

因为已經有 $\lambda_3=1\neq0$，所以 λ_1、λ_2、λ_3 不全为零是当然的。

ii) 充分性

若不全为零的三个实数 λ_1、λ_2、λ_3 (不妨設 $\lambda_3\neq0$) 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ 又使(3)成立．于是，解出 $\lambda_1=-(\lambda_2+\lambda_3)$，代入(3)可得

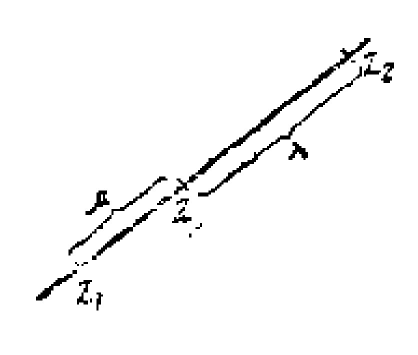


图 3.2

$$\lambda_3(z_3-z_1)+\lambda_2(z_2-z_1)=0.$$

由此可得

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \text{ (实数)}.$$

从而 z_1、z_2、z_3 三点共綫。

設 z_1、z_2 是两个固定点．現在要在它們的連綫上求出一点 z，将綫段 z_1、z_2 按事先給定的比例分成两个綫段(图3.2)。

就是說給出实数 λ、μ 来找出一点 z 使

$$\|\overrightarrow{z_1z}\|:\|\overrightarrow{zz_2}\|=\mu:\lambda,$$

亦即

$$\lambda\|\overrightarrow{z_1z}\|=\mu\|\overrightarrow{zz_2}\|.$$

由于此时 $\overrightarrow{z_1z}$ 和 $\overrightarrow{zz_2}$ 的方向相同，从而上式相当于

$$\lambda(z-z_1)=\mu(z_2-z).$$

从这里可以解出

$$z=\frac{\lambda z_1+\mu z_2}{\lambda+\mu}, \tag{4}$$

这里的 λ、μ 可以是同号的实数．特别当 $\lambda=0$ 时，(4)給出 $z=z_2$；$\mu=0$ 时給出 $z=z_1$；而当 $\lambda=\mu$ 时，(4)給出 z_1 与 z_2 的連綫的中点 $\frac{z_1+z_2}{2}$．

我們还允許分点 z 取在 z_1 与 z_2 的連綫的延長綫上，但此时 $\overrightarrow{z_1z}$ 与 $\overrightarrow{zz_2}$ 方向正好相反（图 3.3）．因而在等式

图 3.3

$$\lambda(z-z_1)=\mu(z_2-z)$$

中，λ 与 μ 必須是异号实数．反之，若允許 λ 与 μ 是异号实数（但 $\lambda\neq-\mu$），則由 (4) 表达出的点 z 必在 z_1 与 z_2 的連綫的延長綫上．这样的分点 z 称为**外分点**；而当 λ, μ 同号时，由(4)表出的 z 称为**內分点**．

若令 $\nu=\frac{\mu}{\lambda}$，則可將(4)改写成

$$z=\frac{z_1+\nu z_2}{1+\nu},\tag{5}$$

其中$\nu\neq-1$. 在(5)中，只包含一个参数ν，仔細地討論ν变动时分点z在z_1、z_2連綫上运动的情况不但是有趣的，而且是重要的. 当$\nu=0$时，得到点z_1; 而当$0<\nu<+\infty$时(这正是說λ、μ同号)，就对应着内分点. 当ν从0增加到$+\infty$时，点z从z_1漸漸走近点z_2. 当λ、μ异号时，此时$\nu<0$, 所以負实数ν代入(5)所决定出来的是外分点. 这时又可以細分为两种情形:

i) $-\infty<\nu<-1$, 此时分点z在延长綫上z_2的外边，当ν无限靠近-1时，分点可移到离z_2任意远的地方，而ν的絕对值无限增大时，z就越来越靠近z_2这一点.

ii) $-1<\nu<0$, 此时分点z在延长綫上z_1的外边，当ν无限地靠近-1时，分点z可以移到离z_1任意远的地方(图3.4).

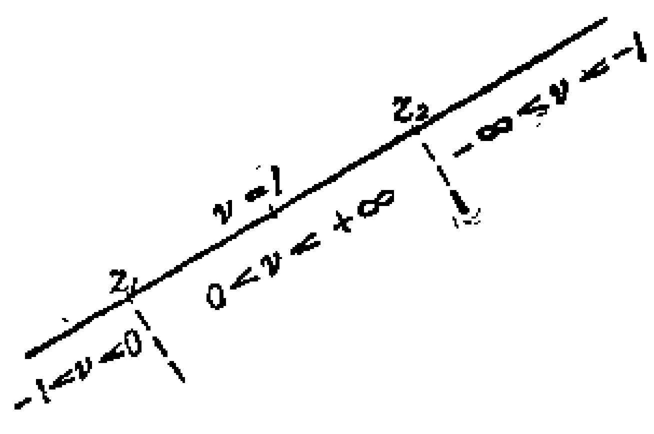


图 3.4

公式(4)或(5)都称为定比分点公式.

例1　求$\triangle z_1z_2z_3$的重心.

解　三角形三条中綫的交点即为三角形的重心. 先求

z_1z_2 的中点

$$z'=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

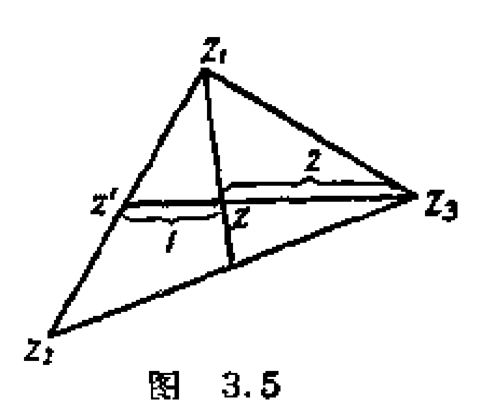


图 3.5

而三角形的重心 z 要把 z' 和 z_3 的連綫按 1:2 分成两个綫段，于是按公式(4)有

$$z=\frac{2z'+1\cdot z_3}{2+1}=\frac{2\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+z_3}{3}$$

$$=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

这就是 $\triangle z_1z_2z_3$ 的重心。

例 2　求证：若三角形的重心和它的外心重合，则此三角形为一正三角形。

证　适当选取坐标系，使此三角形的重心合于原点．設在此坐标系下，此三角形的三个頂点用复数 z_1、z_2、z_3 表示。由于原点是外心，故

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=\rho,$$

又由于原点亦是重心，故由例 1 可知

$$0=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3),$$

亦即

$$z_1+z_2+z_3=0.$$

从而

$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)$$

$$= z_1z_2z_3\left(\frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}\right)$$

$$= z_1z_2z_3\left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}+\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}+\frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2}\right)$$

$$= \frac{z_1z_2z_3}{\rho^2}(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)$$

$$= \frac{z_1z_2z_3}{\rho^2}(\overline{z_1+z_2+z_3})=0.$$

又从

$$(z_1+z_2+z_3)^2=0,$$

可得

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0.$$

結合此两式可知

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1,$$

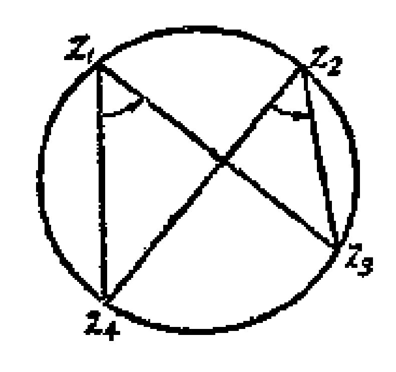
由第二节的例 2 便知 $\triangle z_1z_2z_3$ 为正三角形.

2° 現在来求出四个点同在一个圓周上的条件. 四点放在同一个圓周上一共有六种花样. 这里虽然只画出两种情形来討論,但結論对其余情形同样有效,耐心的讀者不妨一一驗证之.

設 z_1、z_2、z_3、z_4 按下列两种方式分布在一个圓周上(图 3.6). 无論在哪一种情形,图上所标出的、頂点在 z_1 及 z_2 的两个有向角都可以用

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right) \text{ 及 } \arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$$

来計算. 不同的只是在左图的情形,此二有向角相等,故



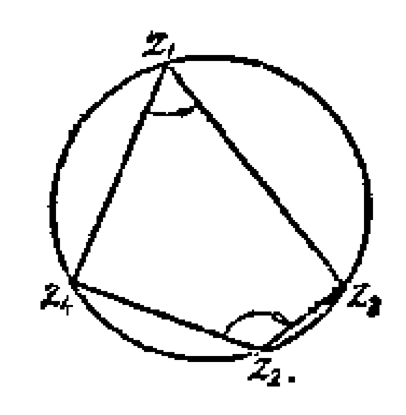


图 3.6

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)=\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right),$$

从而

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0.$$

在右图的情形，顶点在 z_1 的有向角与顶点在 z_2 的有向角的相反有向角之和正好等于 π，即

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=\pi,$$

从而

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=\pi.$$

合并起来可以写成

$$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0 \text{ 或 } \pi,$$

这相当于说，复数

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

是一个实数．为方便計，我們令

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)},$$

并称它为由 z_1、z_2、z_3、z_4 所构成的交比．根据以上推理可知，z_1、z_2、z_3、z_4 共圓的一个必要条件是交比(z_1, z_2, z_3, z_4)是一个实数．

現在設(z_1, z_2, z_3, z_4)为实数，分两种情形来討論：如果这四点中有三点不共綫，那么过这三点必有唯一的一个圓周通过，因为此时交比为一实数，故将前述推理倒回去，并利用初等几何中的簡单事实，可知第四个点亦必在这个圓周上．其次，如果此四点中有三点共綫，不妨設 z_2、z_3、z_4 共綫，于是依上段的討論可知

$$\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = 实数.$$

又因为

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = 实数,$$

故

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = 实数.$$

这表明 z_1、z_3、z_4 共綫，从而 z_1、z_2、z_3、z_4 在同一条直綫上．总起来說，当交比(z_1, z_2, z_3, z_4)为一实数时，z_1、z_2、z_3、z_4 必共圓或共綫．由于可能"共綫"，这似乎破坏了"共圓"的統一性．为了消除这个缺陷，我們今后把直綫也看成圓周，只是它的半徑不是一个有限数，就是說把直綫看成是半徑为无限大的圓

周，今后我們永远采取这种看法.

我們把上述結果写成

定理二 z_1、z_2、z_3、z_4 共圓的必要充分条件是交比

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\text{实数}.$$

談到交比，必須指出任何四个复数的交比的一个几何解释. 置

$$\psi_1=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right),\quad \psi_2=\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right),$$

$$\varphi=\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)=\psi_1-\psi_2.$$

分别作过 z_1、z_3、z_4 及 z_2、z_3、z_4 的圓周，又在 z_3 处分别作两圓的切綫，用 θ_1 及 θ_2 分别記这两条切綫与連 z_3、z_4 的弦所夹的角（图 3.7）. 由初等几何知 $\theta_1=\psi_1$，$\theta_2=\psi_2$，从而

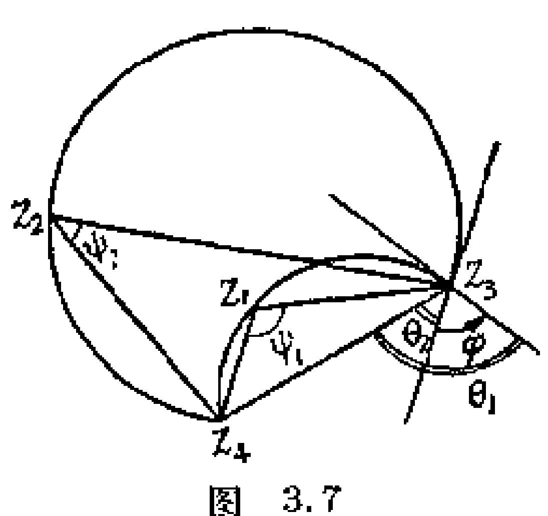


图 3.7

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)=\varphi=\theta_1-\theta_2.$$

我們約定，称两圓周在交点处的切綫間的夹角为这两个圓周的夹角，这样一来，上述等式可以叙述为：$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 等于过 z_1、z_3、z_4 与 z_2、z_3、z_4 的两个圓周間的夹角. 这个結論，在第五节中将会用到.

最后，再給出一个下段中要用到的四点共圓的条件.

設 z_1、z_2、z_3、z_4 在同一个圓周上，連結 z_2 与 z_1，z_4 与 z_3

的两条直綫交于圓外的一点 z (图 3.8)，命

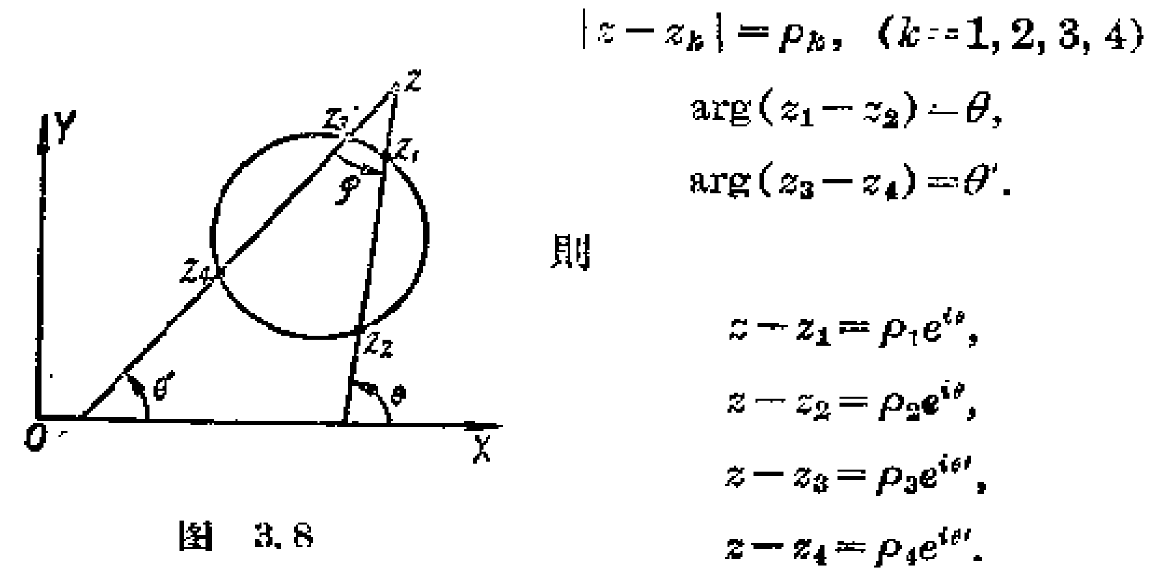


图 3.8

$$|z-z_k|=\rho_k,\quad (k=1,2,3,4)$$

$$\arg(z_1-z_2)=\theta,$$

$$\arg(z_3-z_4)=\theta'.$$

則

$$z-z_1=\rho_1e^{i\theta},$$

$$z-z_2=\rho_2e^{i\theta},$$

$$z-z_3=\rho_3e^{i\theta'},$$

$$z-z_4=\rho_4e^{i\theta'}.$$

于是

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_3)(z-z_4)}=\frac{\rho_1\rho_2e^{i2\theta}}{\rho_3\rho_4e^{i2\theta'}}=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3\rho_4}e^{i(2\theta-\theta')}$$

$$=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3\rho_4}e^{i2\varphi}.$$

由初等几何知

$$\rho_1\rho_2=\rho_3\rho_4,$$

从而

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_3)(z-z_4)}=e^{i2\varphi},$$

其中
$$\varphi=\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}\right).$$

反之，也可证明，若 z_1、z_2、z_3、z_4 有上述性質，它們必共圓.

3° 現在我們来討論平面几何中有关三点共綫、三綫共点的問題. 首先給出

定理三 （Menelaus 定理）

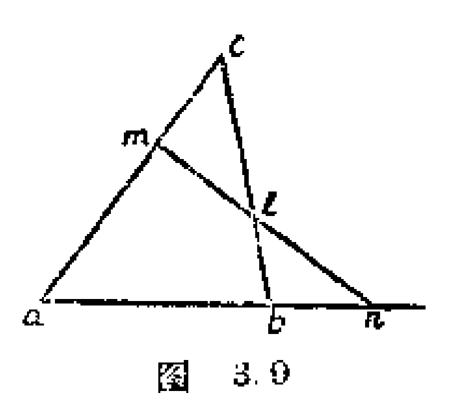


图 3.9

在 $\triangle abc$ 的三边（或它們的延長綫）上分别取三点 l、m、n(图 3.9)，則等式

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n}{b-n}=1 \qquad (6)$$

是 l、m、n 三点共綫的必要充分条件.

证 i) 充分性

設(6)成立，由于 b、l、c 共綫，所以$\frac{b-l}{c-l}$=实数，不妨将这实数写成$\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$的形式，即

$$\frac{b-l}{c-l}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

这里 λ_2、λ_3 都是实数且 $\lambda_2 \neq \lambda_3$，否則就有$\frac{b-l}{c-l}=1$，由此可推出 $b=c$，这是不可能的.

同理，由于 c、m、a 共綫，可設

$$\frac{c-m}{a-m}=\frac{\lambda_1}{\lambda_3}. \quad (\lambda_1 \text{ 为实数})$$

将此二式代入(6)，可以解出

$$\frac{a-n}{b-n}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

将此三式分别改写成

$$\begin{aligned}(\lambda_3-\lambda_2)l&=\lambda_3c-\lambda_2b,\\(\lambda_1-\lambda_3)m&=\lambda_1a-\lambda_3c,\\(\lambda_2-\lambda_1)n&=\lambda_2b-\lambda_1a,\end{aligned} \qquad (7)$$

并将它们相加，便得

$$(\lambda_3-\lambda_2)l+(\lambda_1-\lambda_3)m+(\lambda_2-\lambda_1)n=0.$$

又因为

$$\lambda_3-\lambda_2\neq 0,$$

且有

$$(\lambda_3-\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_1)=0,$$

应用定理一可知l、m、n共线。

ii)必要性

设l、m、n共线，要来证明它们使(6)成立。仍令

$$\frac{b-l}{c-l}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\quad \frac{c-m}{a-m}=\frac{\lambda_1}{\lambda_3},$$

从而

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

我们指出$\lambda_1\neq\lambda_2$，否则(7)的前两式将成为

$$(\lambda_3-\lambda_1)l=\lambda_3c-\lambda_1b,$$

$$(\lambda_1-\lambda_3)m=\lambda_1a-\lambda_3c.$$

将此二式相加，

$$(\lambda_3-\lambda_1)(l-m)=\lambda_1(a-b),$$

故

$$l-m=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_3}(b-a).$$

这表明$\overrightarrow{ml}$平行于$\overrightarrow{ab}$，这是不可能的，因为m、l与$\overrightarrow{ab}$上的一点n是共线的，于是$\lambda_1\neq\lambda_2$，亦即$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$是一个不等于1的实数。依定比分点，必可在$a$、$b$的连线上找出一点$n'$，使

$$\frac{a-n'}{b-n'}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

事实上，只须令

$$n'=\frac{\lambda_2 b-\lambda_1 a}{\lambda_2-\lambda_1}$$

即可．根据 n' 的取法可知

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n'}{b-n'}=1. \tag{8}$$

由已經证明了的本定理的充分性部分知道 l、m、n' 共綫，但題設 l、m、n 共綫．因而 n 和 n' 都是 l、m、n 的連綫与 a、b 的連綫的交点．但两条不平行的直綫只有唯一的一个交点，故 $n'=n$．于是(8)正是(6)．

現在再来证明关于三綫共点的

定理四 （Ceva 定理）

在 $\triangle abc$ 的三边（或它們的延长綫）上分别取三点 l、m、n，則等式

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n}{b-n}=-1 \tag{9}$$

是 a 与 l，b 与 m，c 与 n 的連綫相交于一点的必要充分条件．

证 i) 必要性

設这三条綫相交于点 p（图 3.10）．考察 $\triangle bcn$．由于 l、p、a 三点共綫，利用定理三，有

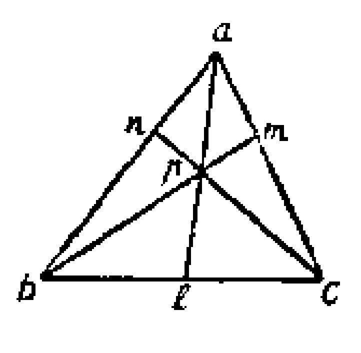


图 3.10

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-p}{n-p}\cdot\frac{n-a}{b-a}=1.$$

同理，对 $\triangle nca$，由于 p、m、b 三点共綫，有

$$\frac{n-p}{c-p}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-b}{n-b}=1.$$

将上面两式相乘幷整理后得

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n}{b-n}=-1.$$

ii) 充分性

設(9)成立，命 b 与 m，c 与 n 的連綫的交点为 p，連 a 与 p 幷設連綫和对边相交于 l'. 由已經证明过的必要性部分可知

$$\frac{b-l'}{c-l'}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n}{b-n}=-1.$$

将此式与(9)比較，可得

$$\frac{b-l'}{c-l'}=\frac{b-l}{c-l},$$

由此可得 $l=l'$. 这正說明 a 与 l，b 与 m，c 与 n 的連綫相交于点 p.

下面举几个例子来說明这两个定理的应用。

例 1 三角形的三高綫共点(图 3.11).

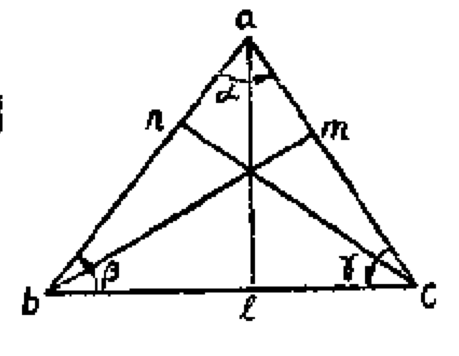


图 3.11

证 由于 m、c、n、b 四点共圓，利用 2° 最后給出的共圓条件，有

$$\frac{(a-m)(a-c)}{(a-n)(a-b)}=e^{i2\alpha}.$$

同理有

$$\frac{(b-n)(b-a)}{(b-l)(b-c)}=e^{i2\beta},$$

$$\frac{(c-l)(c-b)}{(c-m)(c-a)}=e^{i2\gamma}$$

将上面三式两边相乘并整理后得

$$\frac{c-l}{b-l}\cdot\frac{b-n}{a-n}\cdot\frac{a-m}{c-m}=-e^{i2(\alpha+\beta+\gamma)}=-e^{i2\pi}=-1$$

依定理四，知三高綫相交于一点。

例 2（Desargues 定理）

設 $\triangle abc$ 和 $\triangle a'b'c'$ 的对应頂点 a、a'，b、b'，c、c' 的連綫相交于一点 q，則其对应边的交点 l、m、n 必共綫（图 3.12）。

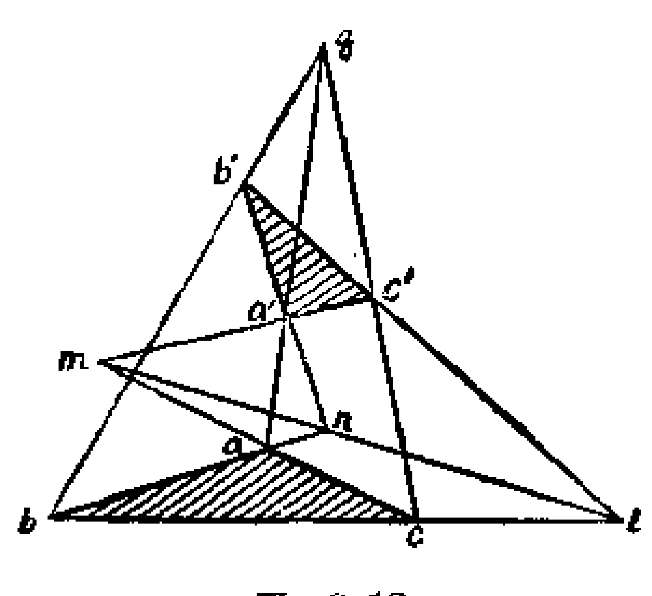


图 3.12

証 先考察 $\triangle bcq$，由于 l、c'、b' 三点共綫，依定理三便有

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-c'}{q-c'}\cdot\frac{q-b'}{b-b'}=1.$$

再考察 $\triangle caq$ 及 $\triangle abq$，由于 m、a'、c' 共綫及 n、b'、a' 共綫，故有

$$\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-a'}{q-a'}\cdot\frac{q-c'}{c-c'}=1,$$

$$\frac{a-n}{b-n}\cdot\frac{b-b'}{q-b'}\cdot\frac{q-a'}{a-a'}=1.$$

将以上三式相乘并化簡，即得

$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n}{b-n}=1.$$

由于 l、m、n 分别是 $\triangle abc$ 三边上的点，仍依定理三，知 l、m、n 共綫.

例 3 (Pascal 定理)

内接于圆的任意六边形的三双对边的交点共綫（图 3.13）.

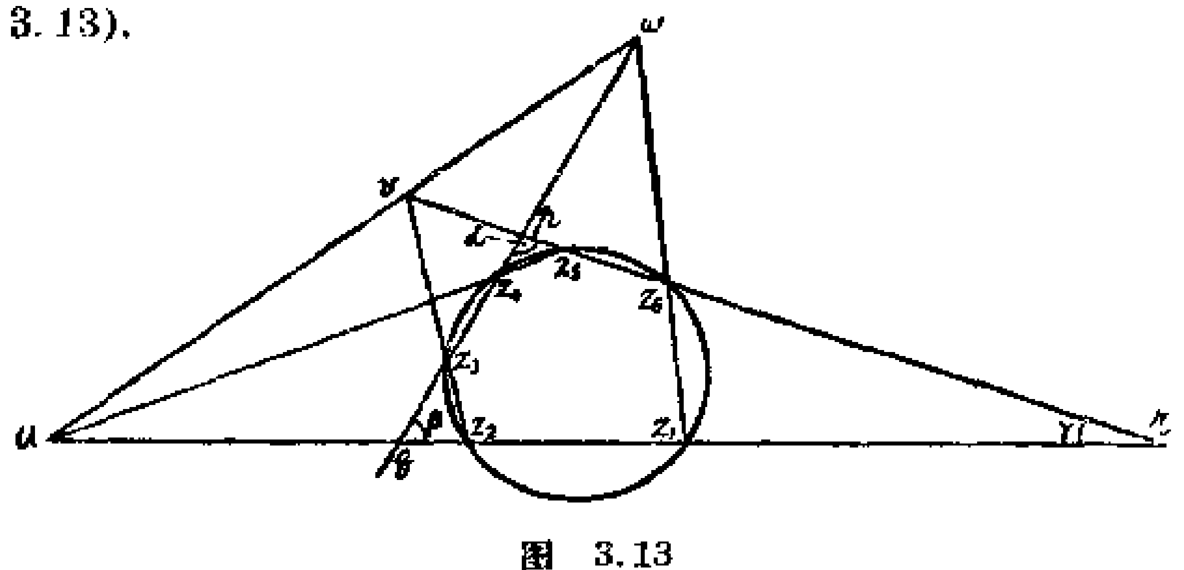


图 3.13

证 設圓内接六边形三双对边的交点为 u、v、w. 考察 $\triangle pqr$，用 α、β、γ 記这三角形的三个内角，由于 u、z_5、z_4 在 $\triangle pqr$ 的三边上而且共綫，依定理三便有

$$\frac{q-u}{r-u}\cdot\frac{r-z_5}{p-z_5}\cdot\frac{p-z_4}{q-z_4}=1.$$

同理，由于 v、z_3、z_2 共綫和 w、z_1、z_6 共綫，又有

$$\frac{r-v}{p-v}\cdot\frac{p-z_3}{q-z_3}\cdot\frac{q-z_2}{r-z_2}=1,$$

$$\frac{p-w}{q-w}\cdot\frac{q-z_1}{r-z_1}\cdot\frac{r-z_6}{p-z_6}=1.$$

将以上三式相乘并整理后，可得

$$\frac{q-u}{r-u}\cdot\frac{r-v}{p-v}\cdot\frac{p-w}{q-w}\cdot\left[\frac{(p-z_3)(p-z_4)}{(p-z_5)(p-z_6)}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{(q-z_1)(q-z_2)}{(q-z_3)(q-z_4)}\right]\cdot\left[\frac{(r-z_5)(r-z_6)}{(r-z_1)(r-z_2)}\right]=1. \qquad (10)$$

但因 z_3、z_4、z_5、z_6 共圆. 利用 2° 最后的条件可知

$$\frac{(p-z_3)(p-z_4)}{(p-z_5)(p-z_6)}=e^{-i2\alpha},$$

同理还有

$$\frac{(q-z_1)(q-z_2)}{(q-z_3)(q-z_4)}=e^{-i2\beta},$$

$$\frac{(r-z_5)(r-z_6)}{(r-z_1)(r-z_2)}=e^{-i2\gamma}.$$

将以上三式相乘的乘积是

$$e^{-2(\alpha+\beta+\gamma)i}=e^{-2\pi i}=1.$$

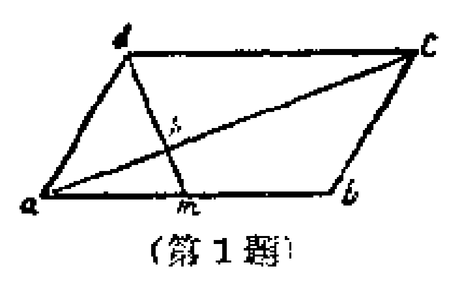
故(10)可写为

$$\frac{q-u}{r-u}\cdot\frac{r-v}{p-v}\cdot\frac{p-w}{q-w}=1.$$

即 u、v、w 三点共綫.

第三节的习题

1. 設 m 为平行四边形 $abcd$ 的底边的中点，命 dm 与 ac 交于 h，求证



(第1题)

$$\overrightarrow{ah}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ac}.$$

2. 設在 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 这 n 个点处各放置一个质量为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 的质点，求证这一质点組的重心是

$$\frac{\mu_1 z_1+\mu_2 z_2+\cdots+\mu_n z_n}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}.$$

3. 設 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为一凸 n 边形的頂点，求证滿足关系式

$$\frac{1}{z_1-a}+\frac{1}{z_2-a}+\cdots+\frac{1}{z_n-a}=0$$

的复数 a 必在此凸 n 边形的内部.

4. 設 $(z_1, z_2, z_3, z_4)=\lambda$，求证由四点 z_1, z_2, z_3, z_4 的所有可能的排列而构成的交比的值只有下列六种：

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

5. 設 z_1, z_2, z_3, z_4 为内接于一圓的四边形的連續的四个頂点，证明

$$|z_1-z_3||z_2-z_4|=|z_1-z_2||z_3-z_4|+|z_2-z_3||z_1-z_4|,$$

并对此公式作几何解释.

6. 以 $\triangle z_1z_2z_3$ 的各边向外作正三角形，求证这三个正三角形的重心也成为一个正三角形的三个頂点.

7. 求证三角形的三条分角綫共点.

四　圓族

在第三节中已經看到，比值 $\frac{z-a}{z-b}$ 具有重要的意义：当 a、b 是两个不同的复数，让 z 在复平面上变动而永远使这比值保持实数值时，点 z 描画出的正是連結 a、b 两点的直綫.

现在我們进一步来討論这个比值，为簡便計，我們引入記号

$$(z, ab)\equiv\frac{z-a}{z-b}.$$

現在問:

i) 当 z 在平面上运动而使

$$\arg(z, ab)=\theta, \quad (\theta\text{ 为一实常数})$$

这时 z 描画出什么曲綫?

ii) 当 z 在平面上运动而使

$$|(z, ab)|=\lambda, \quad (\lambda\text{ 为一正数})$$

这时 z 描画出什么曲綫?

1° 由于 $\arg(z, ab)$ 是向量 $\overrightarrow{bz}$ 到 $\overrightarrow{az}$ 的夹角, 因此, 滿足 $\arg(z, ab)=\theta$的点 z 描画出来的曲綫是以 a, b 的連綫为弦的一段圓弧 (图 4.1). 而另一段圓弧上的点 z' 则适合

$$\arg(z', ab)=-\pi+\theta.$$

以 a, b 的連綫为軸, 把上述圓周对称地翻过来, 又得到一个(用虛綫画出的)圓周. 不难看出, 这个圓周上的两段弧分别是滿足条件

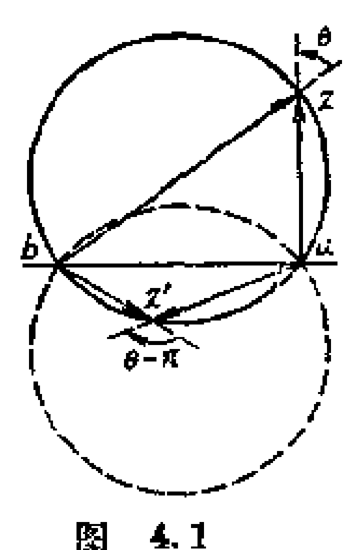


图 4.1

$$\arg(z, ab)=-\theta; \quad \arg(z, ab)=\pi-\theta$$

的点 z 的軌迹. 因此 当 θ 取定 0 与 π 之間的任一值时, 两組条件

$$\arg(z, ab)=\begin{cases}\theta\\-(\pi-\theta),\end{cases} \quad \arg(z, ab)=\begin{cases}-\theta\\\pi-\theta\end{cases}$$

分别表示了两个一样大小的圓周, 它們的位置关于 a, b 的連

綫是对称的．特别当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，上述两个圓周合成一个，即那个以 a, b 两点为同一直徑的两端的圓周．当 $\theta=0$ 或 π 时，$(z, ab)=$实数，从而 z 的軌迹就是过 a, b 两点的直綫：当 $\arg(z, ab)=0$时，点 z 描出的是直綫的在a, b之外的那部分；而当 $\arg(z, ab)=\pi$ 时，点 z 描出 a, b 之間的那条直綫段．

总起来說，当 θ 取 $-\pi$ 到 π 之間的不同值时，滿足条件 $\arg(z, ab)=\theta$ 的点 z 的軌迹是許許多多的圓周和一条过 a, b 的直綫——我們称它們組成一个圓族，这个圓族中的每一个成員都通过 a, b 两点．应該注意的是，对于其中的每一个成員，都必須在 a, b 两点处分开成两段圓弧，每段圓弧对应于 θ 的一个实数值．

2° 現在再来看滿足条件

$$|(z, ab)|=\lambda$$

的点 z 描出什么曲綫．先看 $\lambda=1$，这时有

$$|z-a|=|z-b|,$$

这就是說点 z 运动时永远保持与 a, b 两点有相等的距离．从平面几何知道，点 z 描出的正是 a, b 两点連綫的垂直平分綫．再看 $\lambda\neq1$，先設 $0<\lambda<1$，这时由 $|(z, ab)|=\lambda<1$ 可知 $|z-a|<|z-b|$，这說明动点 z 到 a 的距离比它到 b 的距离近些，从而点 z 只能在被 a, b 連綫的垂直平分綫分割开的两張半平面中 a 所在

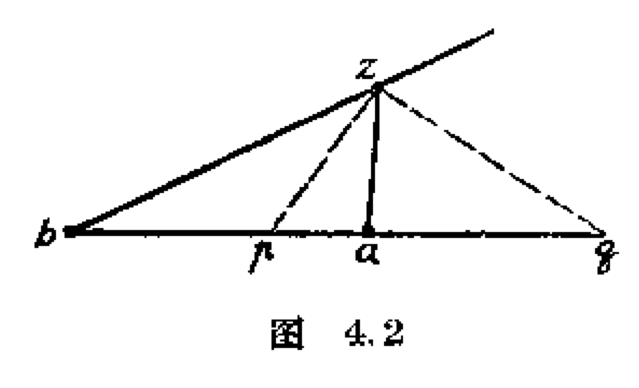


图 4.2

的那張半平面內变动．我們任取一适合$|(z, ab)|=\lambda(<1)$的点z，并将a，b，z連成一个三角形（图 4.2）．作$\angle azb$的內、外分角綫，分别交对边于p, q两点．由平面几何可知

$$\frac{\|\overrightarrow{ap}\|}{\|\overrightarrow{pb}\|}=\frac{\|\overrightarrow{az}\|}{\|\overrightarrow{bz}\|}; \quad \frac{\|\overrightarrow{aq}\|}{\|\overrightarrow{qb}\|}=\frac{\|\overrightarrow{az}\|}{\|\overrightarrow{bz}\|}.$$

但是

$$\frac{|\overrightarrow{az}|}{|\overrightarrow{bz}|}=\frac{|z-a|}{|z-b|}=|(z, ab)|=\lambda,$$

所以

$$\frac{p-a}{b-p}=\lambda; \quad \frac{q-a}{b-q}=-\lambda.$$

由此可以解出

$$p=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}, \quad q=\frac{a+(-\lambda)b}{1+(-\lambda)}.$$

这两个等式表明p与q分别是a, b連綫按$1:\lambda$的内分点与外分点，它們由a, b及λ完全确定，根本与z无关．注意$\angle pzq=\frac{\pi}{2}$，可知z是在以p, q两点的連結綫段作直徑的圓周上．反推过去也能证明，只要点z在这个圓周上，就能使$|(z, ab)|=\lambda$.

这个圓周的中心是

$$\frac{1}{2}(p+q)=\frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}, \tag{1}$$

而半徑是

$$\frac{1}{2}|p-q|=\frac{\lambda}{1-\lambda^2}|a-b|. \tag{2}$$

从(1)式可以看出，此圓的中心是 a, b 連綫按 $1:\lambda^2$ 的外分点，而且位于 a 的外边。当 λ 在 0 与 1 之間每取定一値时，就得到一个圓周；当 λ 取不同的数値时，就得出不同的圓周。現在来观察(1)式及(2)式，看看当数値 λ 在 0 与 1 之間变动时，这許多圓周中心的位置和半徑的大小将如何变化？ $\lambda=0$ 时只有 $z=a$，这时圓周退縮成了一点。当 λ 漸漸增大而接近 1 时，第三节的 1° 关于定比分点的討論告訴我們，圓周与 a, b 連綫的一个交点 p 将自右向左移动，而漸漸接近 a, b 連綫的中点；另一交点 q 将自左向右移向远处。这正說明，当 λ 从 0 增加而漸近于 1 时，圓的半徑也漸漸增大，并且，对应于較大的 λ 値的圓周总把对应于較小的値的圓周包圍在內部。当 λ 充分接近 1 时，这时圓心離 a 可以充分远，而它的半徑也充分大。当 $\lambda=1$ 时，軌迹已不再是一个眞正的圓周，而变成 a, b 連綫的中垂綫了(图 4.3)。

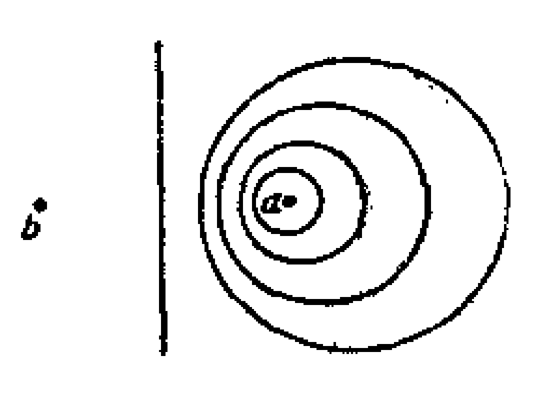


图 4.3

对于 $\lambda>1$ 的情形，我們不需要重新作討論了。因为，令 $\lambda'=\dfrac{1}{\lambda}$，由 $|(z, ab)|=\lambda$ 可知 $|(z, ba)|=\lambda'<1$，这时如果我們书的紙張是洁白透明的話，讀者从背面对着太阳光来看图 4.3，那末 b 点就到前面討論中 a 的位置上去了，于是前面的討論不加任何修改便可应用于新的情况。当 λ 从 1 起无限增大时(也就是 λ' 从 1 无限減小而接近于零时)，这时这些圓周的中心从 b 点左方很远很远的地方漸漸向 b 靠近，半徑也逐

漸減小，如果认为 $\lambda'=0$ 对应着 $\lambda=+\infty$，就可以說 $\lambda=+\infty$ 就决定了 b 点.

从上述的討論中可以看出，条件

$$|(z, ab)|=\lambda \text{ 与 } |(z, ab)|=\frac{1}{\lambda}$$

所决定的是两个同样大小的圓周，它們的位置关于 a, b 連綫的中垂綫是对称的.

总起来說，适合条件 $|(z, ab)|=\lambda$ $(0<\lambda<+\infty)$ 的点的軌迹是一个圓周，当 λ 取不同值时，便得到許許多多的圓周（当 $\lambda=1$ 时对应着一条直綫），于是我們又得到了一个圓族. 当 λ 取定一个正数値时，就得到这圓族中的一个成員. 对着图 4.4 我們总括地描述这个圓族中的成員随 λ 的值变化的情况：$\lambda=0$ 时，圓退縮成一点 a；当 λ 从 0 增加到 1 时，圓的中心在 a, b 的連綫上远离 a 点向远处移动，半徑也越来越大，当 $\lambda=1$ 时，这些很大很大的圓周好像被拉破而成了一个"半徑等于无限大的圓周"——即 a，b 連綫的中垂綫. 当 λ 突破 1 而繼續增大时，圓周就跑到左半平面上来了，而且圓的半徑开始縮小，圓心則在 a, b 連綫上左边很远很远的地方开始向 b

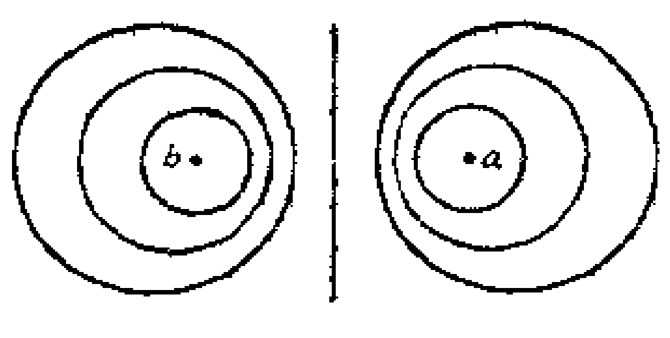


图 4.4

走近，当 λ 的值充分大时，中心就可以离 b 充分近．最后，我們可以认为 b 这一点对应着 $\lambda=+\infty$．

3° 在上面，我們已經很詳細地分别討論了两个圆族，即

$$\arg(z, ab)=\theta \text{ 与 } |(z, ab)|=\lambda.$$

但是这两个圆族之間有什么样的几何关联，却还沒有討論到．現在来从事这一工作．

由 2° 中公式(1)可以算出

$$\left|a-\frac{1}{2}(p+q)\right|\left|b-\frac{1}{2}(p+q)\right|=\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}|a-b|\right)^2.$$

这一等式說明，a, b 两点到圆周 $|(z, ab)|=\lambda(<1)$ 的中心的距离的乘积等于此圆半徑的平方，同时 a, b 两点又同在这圆周的一条半徑的射綫上．凡是适合上述条件的一对点都称为关于这个圆周的对称点．从而上述結論表明，对于 $\lambda\neq1$，每一圆周都以两定点 a, b 为对称点．为了这种說法对 $\lambda=1$ 也适用，只須規定关于直綫的一对对称点是指以此直綫为它們之間的連綫的中垂綫的那样一对点．关于对称点，我們可以建立重要的

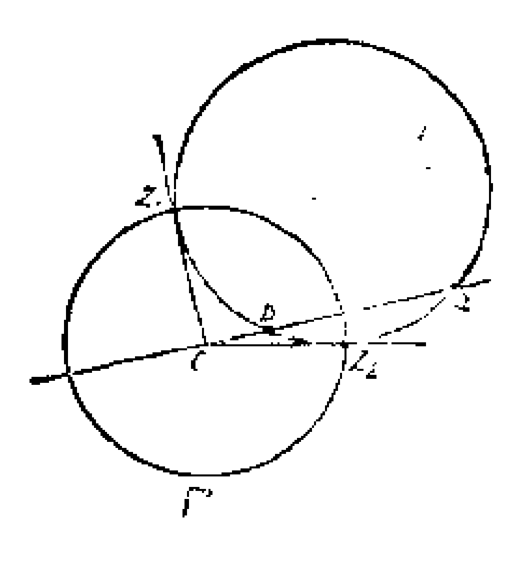


图 1.5

定理五 两点 a, b 是某一圆周 Γ 的一对对称点的必要充分条件是：通过 a, b 两点的圆族中的每一成員都与 Γ 正交——即在两圆相交处有互相垂直的切綫．

証 1) 必要性

設 a, b 是某一以 c 点为中心的圓周 Γ 的一对对称点，而过 a, b 两点的某一圓周与 Γ 相交于 z_1, z_2 两点(图 4.5)，于是

$$|\overrightarrow{ac}||\overrightarrow{bc}| = |\overrightarrow{cz_1}|^2 = |cz_2|^2.$$

平面几何告訴我們，这只有当 $\overrightarrow{cz_1}, \overrightarrow{cz_2}$ 是另一圓周的切綫时才有可能，这正說明两圓在交点处有互相垂直的切綫，即这两个圓周正交。

ii) 充分性

設过 a, b 的圓族中一切成員都与某一中心在 c 点的定圓 Γ 正交。因为 a, b 的連綫也是这圓族中成員之一，从而它与 Γ 正交，故此直綫过該圓的中心 c (图 4.5)。另取圓族中任一个圓周，并設它与 Γ 交于 z_1, z_2 两点，由于此两圓的正交性，可知 $\overrightarrow{cz_1}$ 是一圓周的切綫，依平面几何中的一个定理，便得:

$$|\overrightarrow{ac}||\overrightarrow{bc}| = |\overrightarrow{cz_1}|^2$$

因 $|\overrightarrow{cz_1}|$ 是 Γ 的半徑，故上式正是說 a, b 是 Γ 的一对对称点。

利用定理五便可以說明两个圓族 $\arg(z, ab) = \theta$ 与 $|(z, ab)| = \lambda$ 之間的几何关系了。因为我們知道，圓族 $\arg(z, ab)$

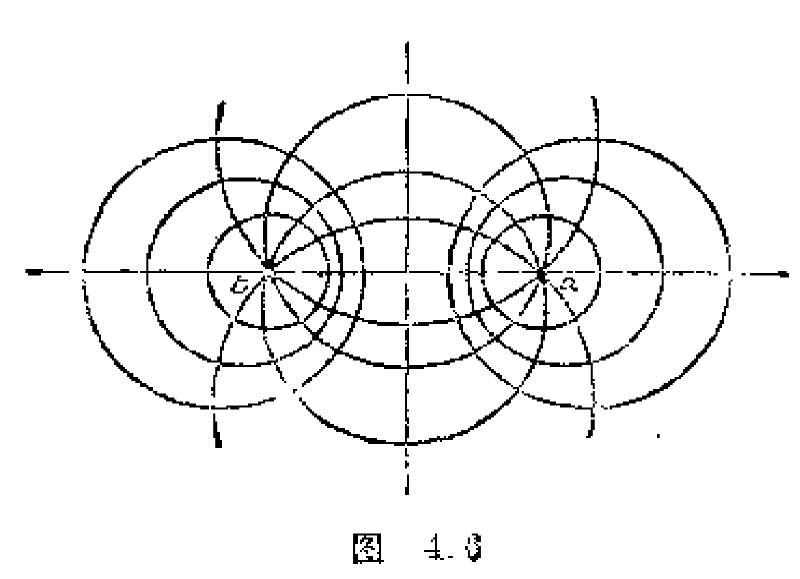


图 4.6

$=\theta$ 的每一成員都是通过 a, b 两点的，而 $|(z, ab)|=\lambda$ 的每一成員都是以 a, b 作为一对对称点的，依定理五，可知当我們把这两个圓族画在同一張图上的时候，便可看到，随便从这两个圓族中各挑出一个成員来，它們都是正交的(图 4.6)。

第四节的习題

1. 作圓周

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\\[2ex] -\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

的图形，幷求出它的中心和半徑。

2. 求圓周

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$$

的中心和半徑，幷作出图形。

3. 求圓周

$$\left|\frac{z-(1+i)}{z-2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 及 \quad \left|\frac{z-(1+i)}{z-2}\right|=\sqrt{2}$$

的中心和半徑，幷作出图形。

4. 画出圓周 $|z|^2=2R(z)$ 及 $|z|^2=2I(z)$，证明它們互相正交

5. 設 z 与 z^* 是关于单位圓的一对对称点，求证

$$z^*=\frac{1}{\bar{z}}.$$

6. 設 z 与 z^* 是关于圓周 $|z-a|=\rho$ 的一对对称点，求证

$$z^*=a+\frac{\rho^2}{\bar{z}-\bar{a}}.$$

五　分式綫性变換

在小册子的第一节里，我們就提出了复平面的概念，即在

平面上表示复数．为了后面的討論能順利地进行，現在首先要把复数表示到球面上去．

1° 以复平面的原点 O 为中心、1 为半徑作一个球，它的南极用 S 表示，北极用 N 表示（图 5.1）．复平面与这个球交

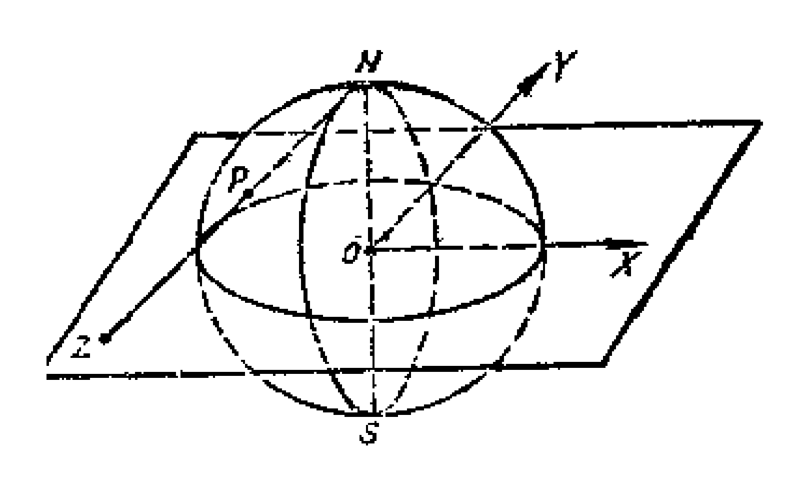


图 5.1

出的那个大圓，称为赤道．和赤道平面平行的平面与球面交出的那些圓，称为緯綫，而通过南北极的平面与球面交出的那些大圓則叫做經綫．

設在复平面上有一复数 z，我們将 z 与北极 N 連結成一条直綫，这条直綫除了 N 之外只能与球面交于一点 P（图 5.1）．反过来，球面上除了 N 以外的每一点 P，当把 N，P 連結成一条直綫后，将在一点 z 处刺破复平面．我們将 z 沿着这直綫移植到球面上的 P 点处，就得到了复数 z 的球面表示．采用这个办法，就使复平面上的一切点同球面上除去北极 N 之外的一切点之間建立了一个一一对应．例如，复平面的原点 O 对应着南极 S；复平面上的单位圓上的每一点对应的是赤道上那些有相同位置的点；单位圓内部的一切点与南半球的一

切点之間建立了一一对应；单位圓外的一切点与北半球上除了N之外的一切点之間建立了一一对应.

唯一显得特殊的是球面上的北极N，它在复平面上无法找到它的对应点. 为了消除这一特殊性，經过一些簡单的分析后，我們便能为它找到一个"理想的"对应点来. 首先注意，复平面上任一以原点为中心的圓周移植到球面上去都在同一条緯綫上：半徑小于1的圓周移植上去是南緯綫；半徑大于1的圓周移植上去是北緯綫（图5.2），而且半徑越大，緯度愈

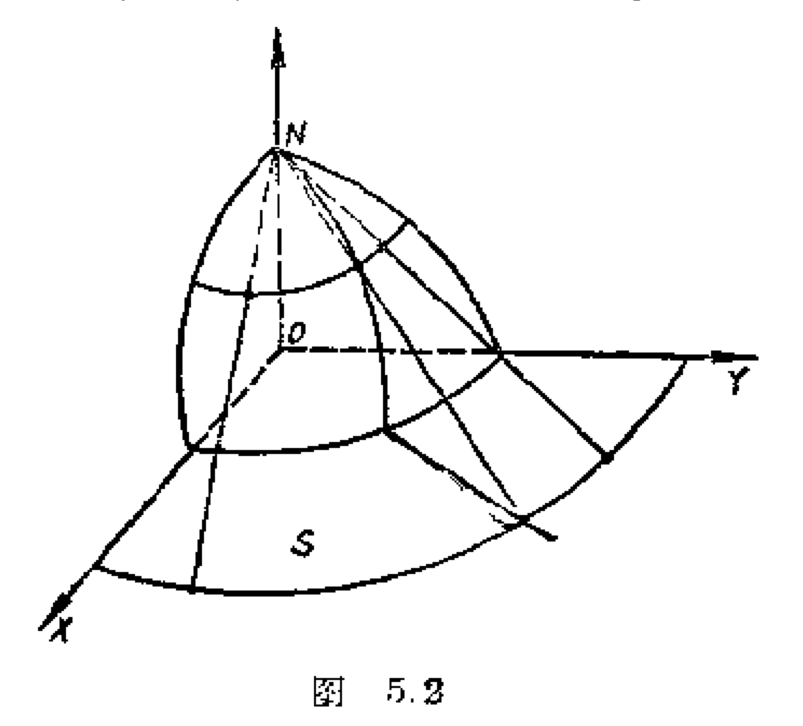


图 5.2

高，圓周外面的点移植上去都在这条緯綫以北. 当这些圓的半徑越来越大时，复平面上任何一点都有被蓋住的时刻，而此时球面上的緯綫越来越向北极縮小，只有北极N一点永远留在一切緯綫的北面. 这样看来，只有这样的"点"才有資格作为N的对应点，它到原点的距离比复平面上任何一点到原点的距离更远，这个理想的点就称为**无穷远点**，用記号∞来表示

它．这样我们就给北极N找到了一个对应点，即∞．其次，还应当看到，复平面上位于一条从原点出发的半射线上的复数z，移植到球面上都落在同一条经线上（图 5.2）．而且z离原点越远，它在球面上对应的点P就离北极越近．这个结论与复平面上的半射线的方向无关，就是说，不论朝哪个方向出发的半射线，它上面的点无限远离原点而运动时，与它对应的球面上的点都将向北极无限接近．这个事实可以帮助我们清除这样一种似是而非的想法，即认为每一条从原点出发的半射线上都有一个无穷远点．总起来说，正确的理解应该是：复平面上的无穷远点只有一个，那就是到原点的距离超过复平面上任一点到原点的距离的那一“点”，就是沿着平面上每一条自原点出发的半射线无限远离原点而运动时，最后殊途同归的那一“点”，就是与球面上的北极N相对应的那一“点”．引入了无穷远点∞之后的复平面，称为**扩大复平面**．

大家会问，引入无穷远点的概念是否单单为了给北极N找到对应点而没有其他的好处呢？不是的．引入这一概念会使今后的叙述变得简洁和统一．这里先举两个例子说明一下．大家已经知道，复平面上过原点的直线移植到球面上去是经线（这是通过北极的球面圆周）．不难看出，复平面上任一条直线移植到球面上去就是过北极N又包含此直线的平面与球面的交线——即一个通过北极的球面圆周．复平面上以原点为中心的圆周移植到球面上去是纬线（这是不通过北极的球面圆周），用空间解析几何的方法还可以证明（这里从略），复平面上中心随便在什么地方的一个圆周，移植到球面上去

总是一个不通过北极的球面圆周. 由此可見，复平面上不論直綫也好，圓周也好，移植到球面上去都是球面圓周，唯一的区别在于，对应于直綫的球面圓周必过北极，而对应于圓周的球面圓周一定不通过北极. 这样，在扩大复平面上，我們就可以把圓周和直綫統称圓周，这是因为它們移植到球面上去之后都是球面圓周的緣故；还可以說直綫是通过无穷远点的圓周，因为它移植到球面上去的球面圓周都通过北极N，而N又是和扩大复平面的无穷远点∞对应着的.

现在再来看第二个例子. 在第四节，曾引进过关于一个圓周的一对对称点的概念. 現在来介紹对称点的几何作图法，为簡单起見，設圓周为单位圓，即中心在原点半徑等于1的圓周. 設z是圓内一点，过O与z連起一条射綫，过z作垂直于此射綫的直綫交单位圓周于a，再过a作圓周的切綫交射綫于z^*（图5.3），我們說z与z^*就是一对关于单位圓的对称点，证明如下：

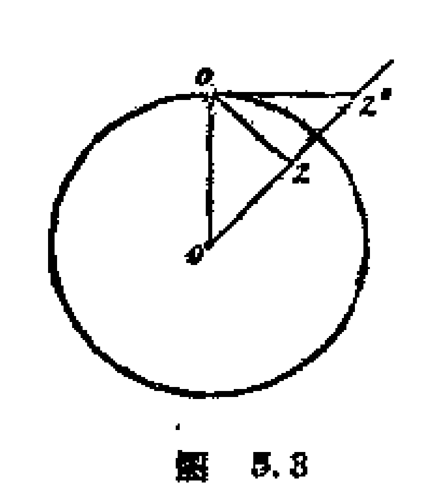


图 5.3

由于 $\triangle Oza \backsim \triangle Oaz^*$，

故

$$\frac{|\overrightarrow{Oz}|}{|\overrightarrow{Oa}|}=\frac{|\overrightarrow{Oa}|}{|\overrightarrow{Oz^*}|},$$

亦

$$|\overrightarrow{Oz}||\overrightarrow{Oz^*}|=|\overrightarrow{Oa}|^2=1.$$

这正説明 z 与 z^* 是关于单位圆的一对对称点. 由作图法可見,凡是单位圆内除原点之外的任一点,都有一个关于单位圆的对称点, 而且可以用上述方法作出来. 唯一显得特殊的是圆心 O, 它在单位圆外是找不到对称点的,因为在这时 $z=0$, 从而 $|\overrightarrow{Oz}|=0$, 不論 z^* 是什么点, 等式 $|\overrightarrow{Oz}||\overrightarrow{Oz^*}|=1$ 是不可能成立的. 現在让 z 沿着同一条半徑向圆心接近, 由上述的关于 z^* 的作法可知 z^* 也在这条半徑的延續上变动, 由等式 $|\overrightarrow{Oz^*}|=\dfrac{1}{|\overrightarrow{Oz}|}$ 可以看出, 当 z 越靠近原点时, 即 $|\overrightarrow{Oz}|$ 越小时, $|\overrightarrow{Oz^*}|$ 就越大, 从而 z^* 离原点就越远, 这也可以設想成 z^* 离无穷远点越近. 有了这些分析之后, 我們看到, 合理的做法是将 O 与 ∞ 看成是关于单位圆的一对对称点. 这样一来, 在扩大复平面上, 每一个点都有一个关于单位圆的对称点.

順便提一下, 对于任何圆周, 对称点的几何作图法与上述关于单位圆的叙述沒有两样, 此时把圆心同 ∞ 看成是一对对称点.

2° 現在来討論整綫性变換 $w=az+b$. 首先, 我們通过一些例子来説明变换的概念.

i) 考察式子

$$w=z+b, \tag{1}$$

这里 b 是某一固定的复数, z 可以取任何复数. 当 z 取定一复数代入上式右边后, 便可算出另一复数 w. 我們説(1)表示一个变換, 它把点 z 变成了 w, 并称 w 是 z 的像. 例如取 $b=1+i$, 則在变换 $w=z+(1+i)$ 之下, $-3+i$ 的像是 $-2+2i$;

0 的像是 $1+i$, $-1-i$ 的像是 0, 等等(图 5.4).

根据第一节所叙述的复数加法的几何解释，很容易說明变换(1)的几何意义：在(1)之下，复平面每一点 z 的像 w，都是把 z 平行移动同一向量 b 而得到. 这个变换总的后果正像把整个复平面移动了向量 b 一样(图 5.5)，所以变换(1)常称为平移.

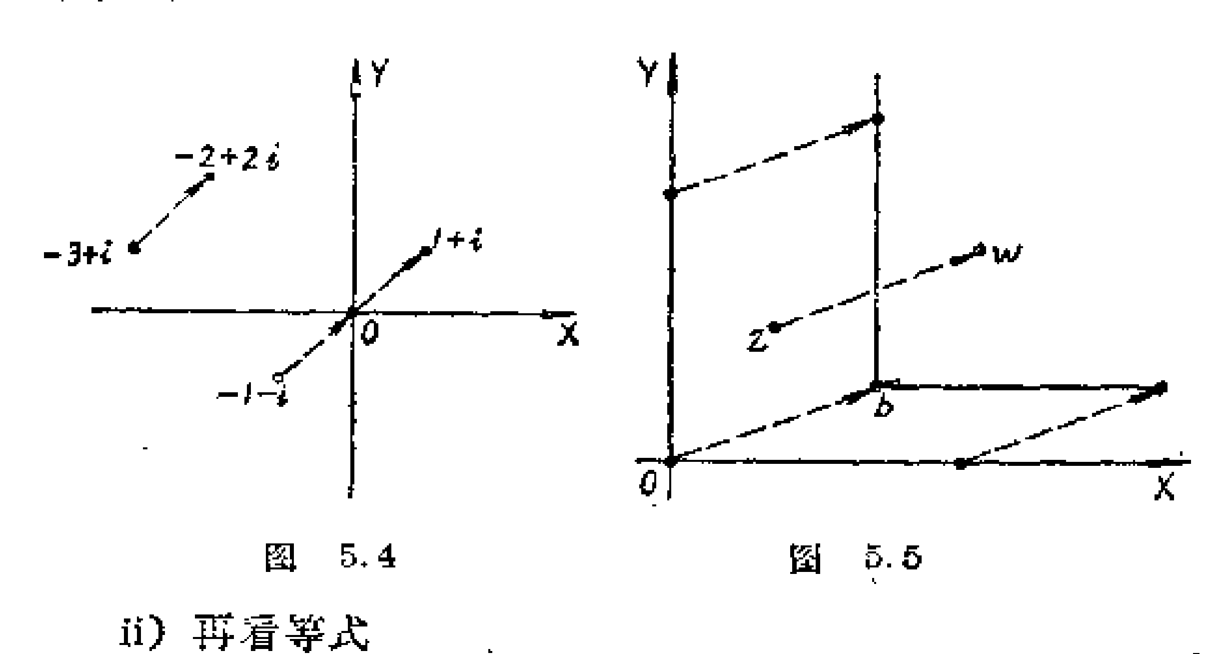


图 5.4　　图 5.5

ii) 再看等式

$$w=ze^{i\theta}, \tag{2}$$

这里 θ 是某一給定的实数，z 可以取任何复数. 当取定 z 而代入(2)式右方后，便可算出另一复数 w，这时說(2)式表示一个变换，它把 z 变成了 w，w 也称为 z 的像. 根据第一节中所述的用 $e^{i\theta}$ 乘另一复数的几何解釋可知：在变换 (2) 之下复平面上每一点 z 的像 w 都是把 z 繞着原点向反时

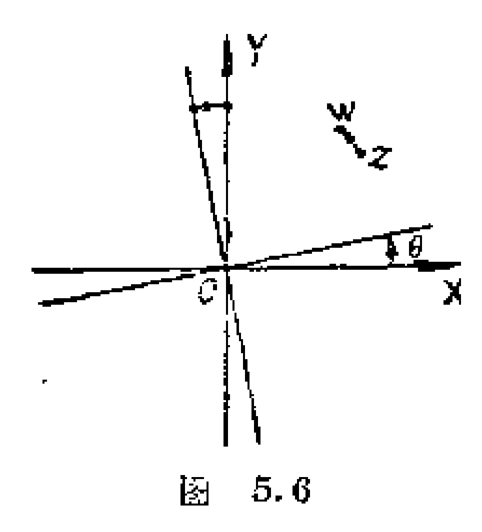


图 5.6

针方向转 θ 角而得. 这个变换总的后果正像把整个复平面绕着原点旋转了 θ 角一样(图 5.6), 所以变换(2)常称为旋转.

iii) 最后来讨论等式

$$w=\rho z, \tag{3}$$

这里 ρ 是某一固定的正数, z 可以取任何复数值. 根据第一节中所述的用正数 ρ 去乘另一复数 z 的几何解释可知: 每一向量经过变换(3)之后方向不变, 但长度为原长的 ρ 倍. 变换(3)常称为**相似变换**.

分别地讨论过上述三种变换之后, 就可以来考虑一般的整线性变换

$$w=az+b, \tag{4}$$

其中 $a\neq0$, b 为某两个固定的复数, z 可以取任何复数. 当 z 取定而代入(4)的右方后便可算出另一个复数 w, 它称为在变换(4)之下点 z 的像. 现在来证明, 变换(4)可以分解成(1)、(2)、(3)三种最简单的变换连续进行的结果. 令 $a=\rho e^{i\theta}$, 顺次将三式

$$z_1=\rho z,$$

$$z_2=z_1 e^{i\theta}$$

$$w=z_2+b$$

中的前一式代入后一式的右端, 最后便得到 $w=\rho e^{i\theta}z+b=az+b$, 而上面三式正是已讨论过的三种变换.

现在来指出变换(4)的一个性质, 在一条直线上的点经过变换之后仍在一条直线上, 在一个圆周上的点经过变换之后仍在一个圆周上. 我们把这个性质简述为: (4) 把直线变

成直綫，把圓周变成圓周．由于上面已經証明(4)可分解为三种简单的变換連續进行的結果，所以只須证明这三种变换中的每一种都具有上述性质就足够了．根据平移和旋轉的几何意义容易看出，它們确实具有所述的性质．剩下来只須证明，相似变换(3)也具有这一性质．首先，設 z_1、z_2 在(3)之下的像分别是 w_1、w_2，即 $w_1=\rho z_1$，$w_2=\rho z_2$．于是

$$w_2-w_1=\rho(z_2-z_1),$$

这表明向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 与 $\overrightarrow{w_1w_2}$ 方向相同，由此可知，(3)把直綫变成与原直綫平行的直綫．其次設 z 是以 a 为中心、以 λ 为半徑的圓周上的任一点，即 $|z-a|=\lambda$，于是 z 的像 $w=\rho z$ 便适合等式

$$|w-\rho a|=\lambda\rho,$$

这正說明 w 在以 ρa 为中心、$\lambda\rho$ 为半徑的圓周上．由此可知(3)把圓周仍变成圓周．

总結以上所述，便可以写出結論：**整綫性变换 $w=az+b$ 把直綫变成直綫，把圓周变成圓周．**

8° 进一步来討論分式綫性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{5}$$

其中 a、b、c、d 是四个給定的复数．如果 $c=0$，当然 $d\neq 0$，此时(5)可写成

$$w=\left(\frac{a}{d}\right)z+\frac{b}{d},$$

当 $a\neq 0$ 时这正是一个整綫性变换，可見分式綫性变换是整綫

性变换的直接推广. 今設$c\neq 0$而把(5)改写成

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

若$ad-bc=0$, 上式成为$w=\frac{a}{c}$, 这式右边已不含z, 故不是一个变换. 所以今后在討論(5)时, 总設a、b、c、d满足$ad-bc\neq 0$这一条件. 当$z=-\frac{d}{c}$时, $cz+d=0$. 这种点z当然不能代到(5)式右边去計算. 不过我們規定: (5)把$-\frac{d}{c}$变成∞, 而把∞变成了普通点$\frac{a}{c}$. 这样一来, 变换(5)就可以看作扩大复平面上的一个变换.

在2°的結尾已經证明变换$w=az+b$把直綫变成直綫, 把圓周变成圓周. 今将证明, 变换(5)也具有类似的性质, 精确地說, 变换(5)把直綫和圓周变成直綫或圓周. 如果我們对圓周一詞作广义的理解——如本节1°中所作的那样——即包含普通的圓周和直綫在内, 那么这一性质仍可写成: **分式綫性变换(5)把圓周变成圓周**. 这个性质称为变换(5)的**保圓性**, 为了证明它, 还要先证明下面的定理.

定理六 分式綫性变換保持交比不变. 就是說若z_1、z_2、z_3、z_4在(5)之下的像分别为w_1、w_2、w_3、w_4, 則有

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

证 因为

$$(w_1, w_2, w_3, w_4)=\frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)},$$

而

$$w_j - w_k = \frac{az_j + b}{cz_j + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d}$$

$$= \frac{(ad - bc)(z_j - z_k)}{(cz_j + d)(cz_k + d)}.$$

将此式中的 j、k 取相应的号碼代入上式的右边，直接計算得

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

由这个定理可以导出許多重要的結論.

定理七 分式綫性变換把圓周仍变成圓周.

证 設 z_1、z_2、z_3 是某一圓周上的三个不同的点，它們在(5)之下的像分别是 w_1、w_2、w_3. 若 z 是 z_1、z_2、z_3 决定的圓周上的任一点，則依共圓条件，

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \text{实数}.$$

又設(5)把 z 变成了 w，由定理六，

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3),$$

从而

$$(w, w_1, w_2, w_3) = \text{实数}.$$

这說明 z 的像 w 在由 w_1、w_2、w_3 所决定的圓周上. 由此可以推知，变換(5)把圓周变成圓周.

对于定理七我們來作些补充說明. 对于变換(5)来說，不通过点 $-\frac{d}{c}$ 的直綫和普通圓周，一定被(5)变成普通圓周；而通过点 $-\frac{d}{c}$ 的直綫，被(5)变成通过 $\frac{a}{c}$ 的直綫；通过点 $-\frac{d}{c}$ 的

普通圓周，則被(5)变成不通过$\frac{a}{c}$的直綫.

設Γ_1、Γ_2是两个相交的圓周，由定理七知(5)把Γ_1变成了圓周Γ_1'，把Γ_2变成了圓周Γ_2'，并且Γ_1'与Γ_2'仍是相交的。在第三节2°中我們曾用交比定义过两个相交圓周間的夹角，現在我們来指出变换(5)的另一重要性质：**保持圓周間的夹角不变**. 亦即：Γ_1与Γ_2的夹角$=\Gamma_1'$与Γ_2'的夹角，这个性质，称为变换(5)的**保角性**.

定理八 分式綫性变换保持相交的两圓周之間的夹角不变.

证 設z_3，z_4为Γ_1，Γ_2的两个交点，而z_1是Γ_1上的另一点，z_2是Γ_2上的另一点. 依第三节2°中所证，应有

$$\Gamma_1\text{与}\Gamma_2\text{的夹角}=\arg(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

又設在变换(5)之下，z_1、z_2、z_3、z_4分別变成w_1、w_2、w_3、w_4。由定理七知w_1、w_3、w_4在圓周Γ_1'上，w_2、w_3、w_4在圓周Γ_2'上，于是

$$\Gamma_1'\text{与}\Gamma_2'\text{的夹角}=\arg(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

但是依定理六$(w_1, w_2, w_3, w_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$，从而这两个复数有相等的幅角，这正是說$\Gamma_1$与$\Gamma_2$的夹角$=\Gamma_1'$与$\Gamma_2'$的夹角.

在第四节3°中曾經給出过关于一个圓周的一对对称点的定义. 現在設Γ为一圓周，z与z^*是一对关于Γ的对称点，在变换(5)之下，Γ变成了另一圓周Γ'，而z与z^*分別变成了w与w^*，很有兴趣的一件事是可以证明：w与w^*正好

是一对关于圓周 Γ' 的对称点. 現在把这个性质写成

定理九　分式綫性变换保持关于圓周的对称点.

証　在证明中主要用到第四节的定理五和变换 (5) 的保角性.

因为 z 与 z^* 是关于 Γ 的一对对称点, 从而通过 z 与 z^* 的一切圓周都与 Γ 正交. 在(5)之下, Γ 变成了 Γ', 通过 z 与 z^* 的任一圓周变成了通过 w 与 w^* 的圓周, 而且通过 w 与 w^* 的任一圓周都是由通过 z 与 z^* 的圓周变来的. 由于(5)的保角性, 知通过 w 与 w^* 的任一圓周都是与 Γ' 正交的, 再利用定理五, 得知 w 与 w^* 是关于圓周 Γ' 的一对对称点.

利用分式綫性变换这一系列性质重新来討論圓族 $\arg(z, ab)=\theta$, $|(z, ab)|=\lambda$, 我們发現現在要得出第四节的一切結論会比那里簡捷到无法比拟的地步. 令 $w=(z, ab)=\frac{z-a}{z-b}$, 則这是一个綫性分式变换. 满足 $\arg(z, ab)=\theta$ 的点 z 在这个变换下的像 w 必满足 $\arg w=\theta$, 这种 w 的全体組成由原点出发的、与实軸正方向夹角为 θ 的半射綫, 要对应于 θ 及

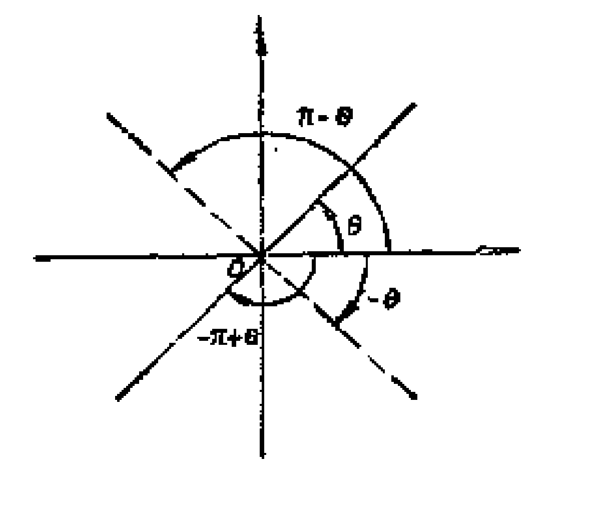


图　5.7

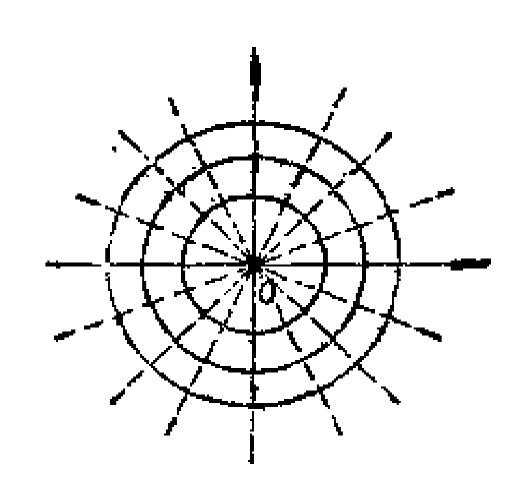


图　5.8

$-\pi+\theta$ 这两个值的点 w 才組成了过原点的一条直綫(图 5.7). 当 θ 取一切不同值的时候就得到了过原点的直綫族——按我們的約定,也可以称它們为过原点及 ∞ 的圓族(图 5.8 的虛綫部份). 因为变換 $w=(z,ab)$ 只能把圓周变成圓周,把 $z=a$ 变成原点 $w=0$, 把 $z=b$ 变成 $w=\infty$, 从而滿足 $\arg(z,ab)=\theta$ 的点 z 描出过 a, b 两点的圓族(图 5.9的虛綫部分).

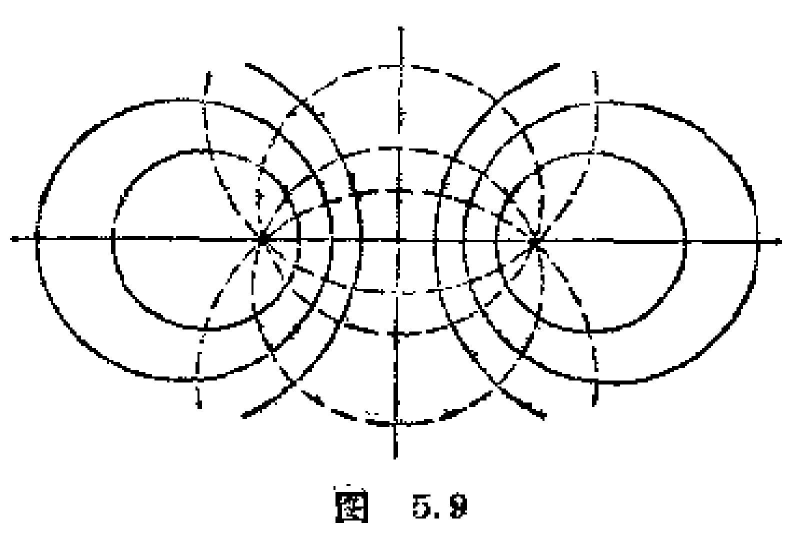


图 5.9

其次,滿足 $|(z,ab)|=\lambda$ 的点 z 的像 w 必滿足 $|w|=\lambda$,这种点 w 組成以原点为中心以 λ 为半徑的圓周. 当 λ 取一切正值时,就得到以原点为中心的同心圓族(图 5.8 的实綫部份). 这圓族中的每一成員都以 0 及 ∞ 为一对对称点, 从而 $|(z,ab)|=\lambda$ 也构成一个以 a, b 为一对对称点的圓族(图 5.9 的实綫部分).

从图 5.8 清楚地看出, 这两个圓族中的每一成員都是正交的, 从而 $\arg(z,ab)=\theta$, $|(z,ab)|=\lambda$ 的每一成員也必是正交的, 这就是这两个圓族相互間的几何联系. 这些結論虽然在第四节中已經得到过, 但大家看到在那里我們付出了多么

巨大的劳动!

最后来看看为了确定一个分式綫性变换需要一些什么条件. 为此,先要证明下列事实: 若 w_1、w_2、w_3 是三个不同的复数,則任給一复数 u,必可找到唯一的一个复数 w 使

$$(w, w_1, w_2, w_3)=u.$$

当 $u=0$ 时, 必須且只須 $w=w_2$, 故可設 $u\neq 0$. 因为 $(w, w_1, w_2, w_3)=\frac{w-w_2}{w-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{(w, w_2w_3)}{(w_1, w_2w_3)}$, 故$(w, w_1, w_2, w_3)=u$ 相当于 $(w. w_2w_3)=(w_1, w_2w_3)u$, 令 $v=(w_1, w_2w_3)u$, 可見 $v\neq 0$. 設 $\lambda=|v|, \theta=\arg v$, 于是 $(w, w_2w_3)=v$ 相当于下列两个等式

$$|(w, w_2w_3)|=\lambda,$$

$$\arg(w, w_2w_3)=\theta,$$

w 必須且只須满足这两个条件. 由前面对于圓族的詳細討論知这个 w 必定既在一个以 w_2, w_3 为对称点的圓周上, 又在一条以 w_2, w_3 两点为端点的圓弧上, 而这个圓周和这条圓弧有一个且只有一个交点,这就是我們要求的点 w 了.

設 z_1, z_2, z_3; w_1, w_2, w_3 是两組点, 考察等式

$$(w, w_1, w_2, w_3)=(z, z_1, z_2, z_3). \tag{6}$$

在右边隨意給定一复数 z,則 $u=(z, z_1, z_2, z_3)$ 便是一个确定的复数,由剛剛证过的事实, 必可找到唯一的一点 w 使(6)成立. 所以, (6)可以看成是一个变换. 不难驗算, 变换(6)把 z_1, z_2, z_3 三点分別变成 w_1, w_2, w_3 三点. 反过来, 如果有一个分式綫性变换使 z, z_1, z_2, z_3 四点分别变成 w, w_1, w_2, w_3 四点,

則由定理六知(6)式成立，这就证明了

定理十 任意給出两組点 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3，必存在唯一的分式綫性变換使 z_1, z_2, z_3 分别变成 w_1, w_2, w_3. 这个唯一的变換可由等式

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3) \tag{6}$$

来表示.

最后举几个例子.

例1 求出把上半平面变成单位圓內的分式綫性变換的一般表达形式.

解 首先，此变換必須把实軸变成单位圓周，其次上半平面中必有某一点 a 被变到在单位圓內的原点. 由于关于实軸与 a 对称的点是 $\bar{a}$，而关于单位圓与 0 对称的是∞，故此变換还应将 $\bar{a}$ 变到∞，因此这一变換可以写成

$$w = k\frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

式中 k 为某一复数，为了决定 k，注意：$z=0$ 在实軸上，故它的像必在单位圓上，亦即用 $z=0$ 代入上式时，应有 $|w|=1$，亦即

$$\left|k\cdot\frac{0-a}{0-\bar{a}}\right| = |k| = 1.$$

由此可得 $k=e^{i\theta}$. 于是所求的变換必須具有形式

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}. \tag{7}$$

不論滿足 $I(a)>0$ 的 a 及实数 θ 如何选取，(7)总是把上

半平面变到单位圆内的一个分式綫性变换.

例 2 給出区域 D：由两圆 $|z-1|=\sqrt{2}$, $|z+1|=\sqrt{2}$ 所圍成(图 5.10). 間在变换

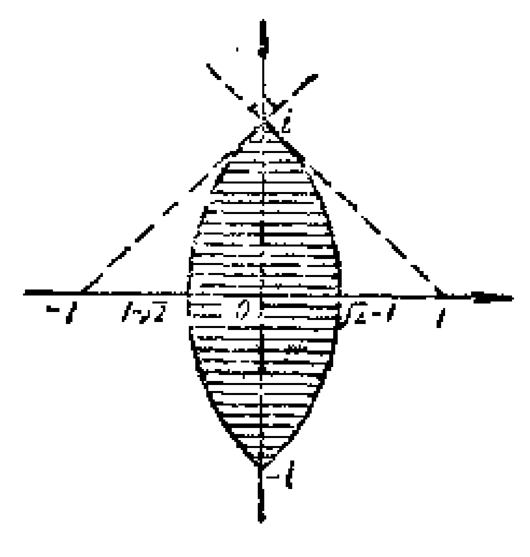


图 5.10

$$w=\frac{z-i}{z+i} \tag{8}$$

之下，D 变成了什么区域？

解 (8)把 i 及 $-i$ 分别变成 0 及 ∞. 由此可知 (8) 把相交于 i 及 $-i$ 两点的两条圆弧变成两条由原点出发的半射綫. 又因此两圆弧在 i 点正交, 故得知两半射綫在原点互相垂直. 为了确定这两条半射綫的位置, 令 $z=\sqrt{2}-1$ 及 $z=1-\sqrt{2}$ 代入(8)而分别算出

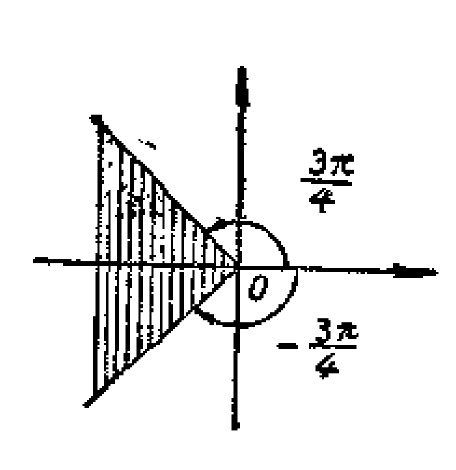


图 5.11

$$w=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}(-1-i),$$

$$w=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}(-1+i).$$

这两点分别在第三象限与第二象限的分角綫上, 故左、右两条圆弧分别变成了第二象限、第三象限的分角綫. 最后为了确定 D 变成什么区域, 在 D 内取一点 $z=0$ 代入(8)得 $w=-1$, 这点在负实轴上, 从而最后确定了(8)把 D 变成如图 5.11 带阴影的区域.

第五节的习题

1. z 及 z' 为复平面上两点，設它們移植到复球面上去分别得到 P 及 P'，求证 $\triangle NPP' \sim \triangle Nz'z$，并由此导出公式

$$|\overrightarrow{PP'}| = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}.$$

2. 設 z 与 z^* 是复平面上关于单位圆周的一对对称点，它們与复球面上的 P 与 P^* 对应着．求证 P 与 P^* 关于赤道平面对称．

3. 設复平面上两点 z 与 z' 分别对应着复球面上两点 P 与 P'．求证 P 与 P' 是球的一条直徑的两端点的必要充分条件是

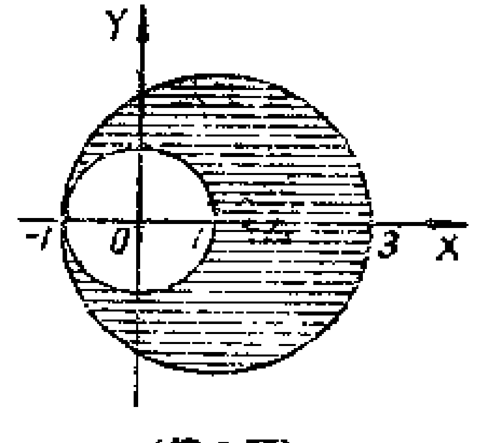
$$z\bar{z}' = -1.$$

（参看前节习题 5 及本节习题 2）

4. 設平面上两圓 A、B 都交定圓 I 于直徑的两端．求证 A、B 必有两个交点，而且过此两交点所作的任一圓 O，亦必交 I 于直徑的两端．

5. 求出一个把三点 $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-1$ 分别变到三点 $w_1=-1$, $w_2=0$, $w_3=1$ 的分式綫性变換，問此变換把 $|z|>1$ 变成什么区域？

6. 問变換 $w=2\dfrac{z-1}{z+1}$ 把月牙形区域 $|z|>1$, $|z-1|<2$（如下图），变成了什么区域？



（第 6 题）

7. 求出把单位圓变成单位圓的分式綫性变換的最一般的表达式．

8. 設 Γ 及 Γ' 为复平面上任何两个圓周，求证总可以找到一个分式綫性变換使 Γ 变成 Γ'．

9. 平面上有 $2n+3$ 个点，其中无三点共綫，无四点共圓．求证总可通过某三个点作一圓周，使其余的 $2n$ 个点一半在圓內，一半在圓外．

六　等速圓周运动

前面已經看到，利用复数可以很方便地討論許多平面几何問題．在这一节里，我們将看到复数也可以用来討論质点的平面运动問題．这里，我們只涉及高中物理书中讲到的质点的等速圓周运动．

設质点在一半徑为 ρ 的圓周上作等速运动，角速度为 ω，初始时刻的位置在正实軸上，于是經过时間 τ 之后，质点的位置是

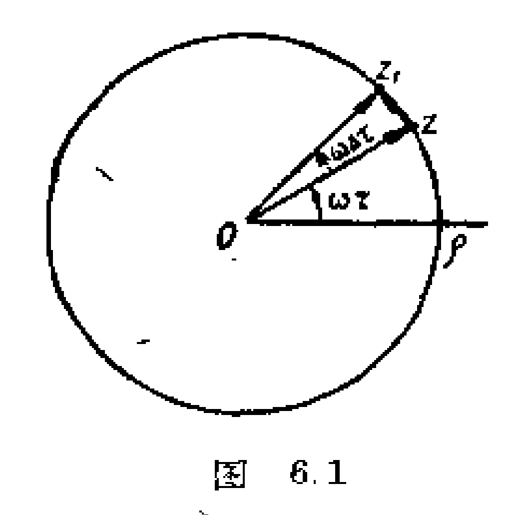


图　6.1

$$z=\rho e^{i\omega\tau}$$

(图 6.1)．現在我們来求此质点运动的速度与加速度．設想时間从 τ 过渡到 $\tau+\Delta\tau$ 后，质点由 z 走到了 $z_1=\rho e^{i\omega(\tau+\Delta\tau)}$，在 $\Delta\tau$ 这段时間之內，质点的位置向量的改变是 $\overrightarrow{zz_1}$，于是单位时間內质点的位置向量平均改变了

$$\frac{\overrightarrow{zz_1}}{\Delta\tau}=\frac{1}{\Delta\tau}(z_1-z)=\frac{1}{\Delta\tau}[\rho e^{i\omega(\tau+\Delta\tau)}-\rho e^{i\omega\tau}]$$

$$=\rho e^{i\omega\tau}\frac{e^{i\omega\Delta\tau}-1}{\Delta\tau}. \qquad (1)$$

这个向量就是质点在从 τ 到 $\tau+\Delta\tau$ 这段时間內的平均速度．不难想象，当 $\Delta\tau$ 愈小时，上述平均速度就愈接近质点在时刻 τ 的瞬时速度，因此为了得到瞬时速度的准确值，只須在(1)式右边让 $\Delta\tau\to 0$ 而取其极限．由于 $\rho e^{i\omega\tau}$ 与 $\Delta\tau$ 无关，从

而只须算出

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{e^{i\omega\Delta\tau}-1}{\Delta\tau}. \tag{2}$$

但是 $e^{i\omega\Delta\tau}-1=\cos\omega\Delta\tau-1+i\sin\omega\Delta\tau$，为了算出(2)只须分别算出

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sin\omega\Delta\tau}{\Delta\tau}, \tag{3}$$

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\cos\omega\Delta\tau-1}{\Delta\tau}. \tag{4}$$

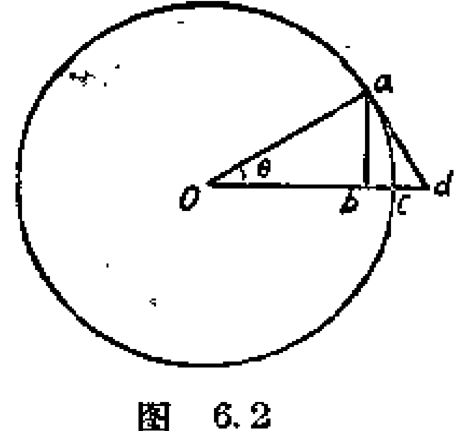


图 6.2

我們先来证明一个重要的极限

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1. \tag{5}$$

取一单位圆(图 6.2)，从图中看出

$$|\overrightarrow{ab}|=\sin\theta,\quad \widehat{ac}=\theta,\quad |\overrightarrow{ad}|=\operatorname{tg}\theta,$$

$$|\overrightarrow{ab}|<\widehat{ac}<|\overrightarrow{ad}|.$$

由此可得

$$\sin\theta<\theta<\operatorname{tg}\theta,$$

亦即

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1.$$

因为当 $\theta\to 0$ 时有 $\cos\theta\to 1$，从而夹在 $\cos\theta$ 与 1 当中的 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 也必 $\to 1$，这就证明了(5)式。

利用(5)式很容易算出极限(3)、(4)，因为令 $\theta=\omega\Delta\tau$ 后便有

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sin\omega\Delta\tau}{\Delta\tau}=\lim_{\theta\to 0}\omega\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=\omega\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\omega.$$

再令 $\theta=\frac{\omega\Delta\tau}{2}$ 后便有

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\cos\omega\Delta\tau-1}{\Delta\tau}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 2\theta}{\theta}\cdot\frac{\omega}{2}$$

$$=-\omega\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta}=-\omega\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\theta=-\omega\cdot 1\cdot 0=0.$$

这样一来对于(2)有

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{e^{i\omega\Delta\tau}-1}{\Delta\tau}=i\omega.$$

从而由(1)导出的瞬时速度

$$v=i\omega\rho e^{i\omega\tau}=i\omega z. \qquad (6)$$

由(6)式知速度的大小为 $|v|=\omega|z|=\omega\rho$，速度的方向为由向量 z 向反时针方向转一直角而得，即速度沿圆周的切线方向.

正像速度 v 是位置 z 关于时间的改变率一样，加速度 w 是速度 v 关于时间的改变率，因此从 v 求 w 与由 z 求 v 的步骤完全类似，故我们可以立刻写出

$$w=i\omega v=i\omega(i\omega z)=-\omega^2 z. \qquad (7)$$

(7)式表明，加速度的大小是 $|w|=\omega^2|z|=\omega^2\rho=\omega|v|$，而加速度的方向与位置向量 z 的方向相反，即沿着半径指向圆心的，这个加速度称为向心加速度.

这就是高中的物理书中讨论等速圆周运动时所得出的主要结论.

十五

习题解答与提示

第一节

2. $a+(b-a)e^{i\frac{\pi}{3}}$ 或 $a+(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. $a+(b-a)i$，　$b+(b-a)i$ 或

$a-(b-a)i$，　$b-(b-a)i$ 或

$a+\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{2}}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$，$a+\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

4. 如下图取坐标系，并取正方形边长为单位长，则：

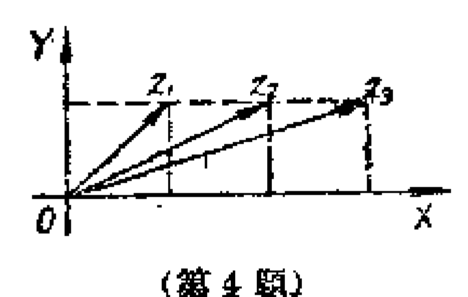
$z_1=1+i$，$z_2=2+i$，$z_3=3+i$，

$$z_1\cdot z_2\cdot z_3=10i,$$

故

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3$$

$$=\arg(z_1z_2z_3)=\arg(10i)=\frac{\pi}{2}.$$



（第4题）

5. 由 $z_1+z_2+z_3=0$ 可导出 $z_3=-(z_1+z_2)$. 再取共轭复数，$\bar{z}_3=-(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$. 将上二式相乘，利用 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ 可得 $\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2=-1$. 于是 $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2-(\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2)=1+1-(-1)=3$. 故 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$.

所以　　$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$.

6. 走1公里后，到了1处；走2公里后到了 $1+e^{i\theta}$ 处，走3公里后到了 $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}$ 处，…，走N公里后到达 $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{i(N-1)\theta}=\dfrac{1-e^{iN\theta}}{1-e^{i\theta}}$ 处. 故离开原点的距离为 $\dfrac{|1-e^{iN\theta}|}{|1-e^{i\theta}|}$.

第二节

1. a 关于直线 $R(z)=I(z)$ 的对称点是

$$|a|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=|a|e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta}=i\bar{a}.$$

2. (1) 因为 z 与 z' 垂直的必要充分条件是

$$z' = i\lambda z, \text{（其中 } \lambda \text{ 为实数）}$$

故 $$z'\bar{z} = i\lambda z\bar{z} = i\lambda|z|^2.$$

从而 $$R(z'\bar{z}) = R(i\lambda|z|^2) = 0.$$

(2) $|z+z'| = |z| + |z'|$ 成立当且只当

$$|z+z'|^2 = (|z| + |z'|)^2, \text{ 亦即}$$

$$(z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = (|z| + |z'|)^2.$$

化簡后得 $$R(\bar{z}z') = |z||z'|.$$

用 φ 記 z, z' 之間的夹角，上式說明 $\cos\varphi = 1$. 这表明 $\varphi = 0$，亦向量 z 与 z' 有相同的方向.

3. 把条件改写成

$$(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (z_4 - z_3)(\bar{z}_4 - \bar{z}_3)$$
$$= (z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + (z_1 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_4),$$

化簡后得 $$R[(z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)] = 0.$$

再由第二題之 1，立得結論.

4. 令 $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$，則

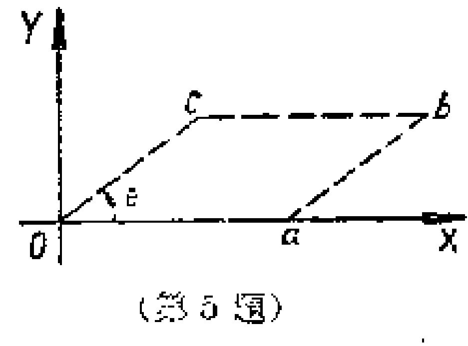
$$w_1 = z_3 + (z_2 - z_3)\omega, \quad w_2 = z_1 + (z_3 - z_1)\omega, \quad w_3 = z_2 + (z_1 - z_2)\omega.$$

直接計算可知

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = w_1w_2 + w_2w_3 + w_1w_3$$

的必要充分条件是

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3.$$



（第 5 題）

5. 如左图選取坐标系.

設 $a = \alpha$, $c = \beta e^{i\theta}$，則

$$b = \alpha + \beta e^{i\theta}.$$

$$\|\overrightarrow{ac}\|^2 = |\alpha - \beta e^{i\theta}|^2.$$

$$\|\overrightarrow{ob}\|^2 = |\alpha + \beta e^{i\theta}|^2.$$

故 $$\|\overrightarrow{ac}\|^2\|\overrightarrow{ob}\|^2 = |\alpha^2 - \beta^2 e^{i2\theta}|^2$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2 e^{i2\theta})(\alpha^2 - \beta^2 e^{-i2\theta})$$
$$= \alpha^4 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})$$

$$=\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2\cos 2\theta.$$

由題設条件可以推出 $\cos 2\theta=0$, 故 $\theta=\frac{\pi}{4}=45^\circ$.

6. 因为 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, 故

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)=z^4+az^2+b$$

其中 a, b 为两个确定的复数(直接計算可知 z^3 与 z 的系数为 0). 由此方程可見, 在必要时可以改变标号而使 $z_1=-z_3$, $z_2=-z_4$.

第三节

1. $d=a+(c-b)$, $m=\frac{a+b}{2}$, 令 $h'=a+\frac{1}{3}(c-a)$, 再証明 d、h'、m 共綫.

2. 用归納法

3. 因 $|z_k-a|^2=(z_k-a)(\bar{z}_k-\bar{a})$, 故 $\frac{1}{z_k-a}=\frac{\bar{z}_k-\bar{a}}{|z_k-a|^2}$,

令 $\mu_k=\frac{1}{|z_k-a|^2}$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 則原式成为

$$(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\bar{a}=\mu_1\bar{z}_1+\mu_2\bar{z}_2+\cdots+\mu_n\bar{z}_n$$

亦

$$a=\frac{\mu_1 z_1+\mu_2 z_2+\cdots+\mu_n z_n}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}.$$

参考第 2 題, 立知 a 必在此凸 n 边形内

5. 容易驗证

$$(z_1, z_4, z_2, z_3)+(z_1, z_2, z_4, z_3)=1.$$

由于 z_1、z_2、z_3、z_4 共圓, 故上述二交比都为实数; 并且因为它們是連續的四个頂点. 作图可知, 它們都是非負实数. 从而上式可改写成

$$|(z_1, z_4, z_2, z_3)|+|(z_1, z_2, z_4, z_3)|=1,$$

这正是要证的等式.

6. (参考第二节第 4 題之解答)

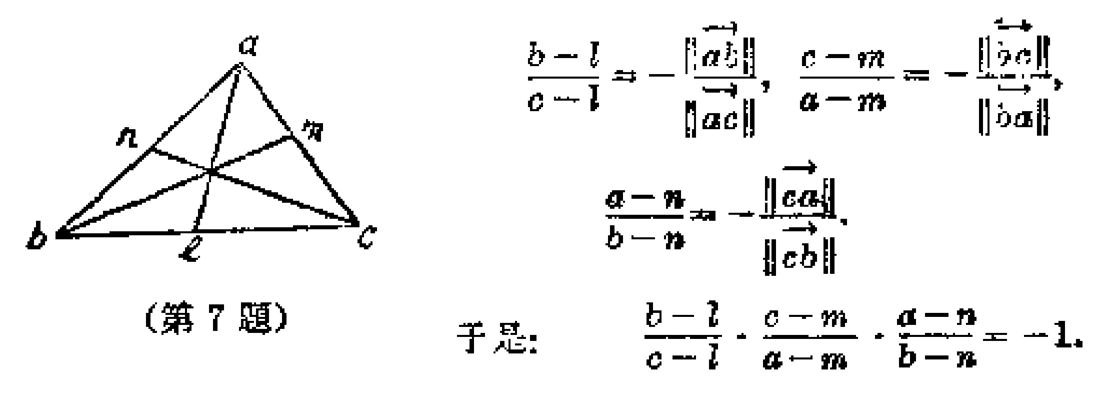
設 m_1, m_2, m_3 为这三个正三角形的重心, 則

$$m_1=\frac{1}{3}(w_1+z_2+z_3),\quad m_2=\frac{1}{3}(w_2+z_3+z_1),\quad m_3=\frac{1}{3}(w_3+z_1+z_2),$$

然后再证明

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=m_2m_3+m_3m_1+m_1m_2.$$

7. 如下图，由平面几何知



(第 7 题)

$$\frac{b-l}{c-l}=-\frac{\|\overrightarrow{ab}\|}{\|\overrightarrow{ac}\|},\quad \frac{c-m}{a-m}=-\frac{\|\overrightarrow{bc}\|}{\|\overrightarrow{ba}\|},$$

$$\frac{a-n}{b-n}=-\frac{\|\overrightarrow{ca}\|}{\|\overrightarrow{cb}\|}.$$

于是：
$$\frac{b-l}{c-l}\cdot\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{a-n}{b-n}=-1.$$

第四节

1. 中心在 $-\frac{1}{\sqrt{3}}i$，半径为 $\left|1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. 中心在 $\frac{i-1}{2}$，半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. 第一个圆的中心为 $2i$，半径为 2.
   第二个圆的中心为 $3-i$、半径为 2.

5. 依题設 $|z||z^*|=1$ 且

$$\arg z=\arg z^*.$$

故
$$z^*=|z^*|e^{i\arg z^*}=\frac{1}{|z|}e^{i\arg z}$$

$$=\frac{|z|}{|z|^2}e^{i\arg z}=\frac{1}{|z|^2}z=\frac{z}{z\bar{z}}=\frac{1}{\bar{z}}.$$

6. 依題設 $|z-a||z^*-a|=\rho^2$ 且

$$\arg(z-a)=\arg(z^*-a).$$

仿上题可推出

$$z^*-a=\frac{\rho^2}{\bar{z}-\bar{a}},$$

故
$$z^*=a+\frac{\rho^2}{\bar{z}-\bar{a}}.$$

第五节

4. 設定圆 Γ 为复平面上的单位圆，以它为赤道平面作单位球　設